Regeln lehren und Vorstellungen verankern

07

Rebecca Roy & Walther Paravicini

1. Regeln und Vorstellungen in der Mathematik

Das Lernen von Mathematik spielt sich häufig im Spannungsverhältnis zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen ab (Rittle-Johnson & Siegler, 1998; Byrnes & Wasik, 1991; Lenz & Wittmann, 2021; Hallett et al., 2012). Konzeptuelles Wissen wird dabei als solches Wissen verstanden, welches mit mathematischen Begriffen, den mit ihnen verbundenen Vorstellungen und den Zusammenhängen der Begriffe untereinander zu tun hat; prozedural hingegen bedeutet, dass es darum geht, wie mathematische Objekte manipuliert, mit ihnen gearbeitet und gerechnet wird – häufig geht es dabei auch um das Durchführen von Algorithmen.

Beispiele, bei denen diese Unterscheidung weiterhilft, gibt es vom Grundschulbereich bis zur Oberstufe und weiter ins Studium hinein. Was bedeutet das Zeichen ‚+' eigentlich im Ausdruck ‚17 + 7'? Was versteht man unter dem Integral einer Funktion und wie hängt dieser Begriff mit dem Ableitungsbegriff zusammen? Dies sind zwei Beispiele für konzeptuelles Wissen.

Wie berechne ich das Ergebnis der Aufgabe ‚17 + 7 =…'? Wie kann ich das Integral einer konkret gegeben Funktion bestimmen? Dies sind Beispiele für eher prozedurales Wissen.

Das prozedurale Wissen tritt uns in der Schule häufig als das Anwenden von Rechenregeln entgegen. Wie bestimme ich beispielsweise das Ergebnis der Aufgabe ‚(-2) · (-3) = …'? Konzeptuelles Wissen kann dabei helfen, die notwendigen Rechen-

http://dx.doi.org/10.15496/publikation-75410

regeln zu memorieren und, wichtiger noch, die Verbindung zwischen formelhaften Ausdrücken und ihrer Interpretation in Kontexten herzustellen. Hier wäre etwa die Frage, wie man einen Term wie ‚$(-2) \cdot (-3)$' zu deuten habe; welche Vorstellungen und Kontexte bieten günstige und tragfähige Interpretationen?

Besonders spannend sind in diesem Zusammenhang diejenigen Phasen im Mathematik-Curriculum, in welchen neue Zahlbereiche eingeführt werden, also wenn etwa die negativen ganzen Zahlen zu den natürlichen Zahlen hinzukommen oder wenn die Bruchzahlen, sogenannte rationale Zahlen, erarbeitet werden. Hier gibt es neben alten Regeln (z. B. den Kommutativgesetzen) auch neue, die es einzuüben gilt, und es gibt neben den neuen Zahlen selbst neue Phänomene und Begriffe, zu denen Vorstellungen aufgebaut werden sollten (z. B. das Kürzen und Erweitern von Brüchen).

Auf der prozeduralen Seite gilt es, bekannte Schemata auf die neue Situation anzupassen – so, wie $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ gilt, gilt auch $2 \cdot (-3) = (-3) \cdot 2$. Oder man muss neue Schemata formen, für die es im bereits bekannten Zahlbereich keine Entsprechung gibt, etwa für das Addieren von Bruchzahlen (Piaget & Cook, 1952; Lortie-Forgues et al., 2015).

Auf der konzeptuellen Seite gibt es Vorstellungen, welche sich vom alten Zahlbereich auf den neuen erweitern lassen (etwa lässt sich die Vorstellung von der Addition als Zusammenfügen von natürlichen Zahlen gut auf positive Bruchzahlen übertragen). Allerdings gibt es auch Stellen, an denen sich bereits erlernte Konzepte und Vorstellungen als nicht mehr tragfähig erweisen und ein Konzeptwechsel (*conceptual change*) notwendig ist. Dieser Konzeptwechsel stellt oft eine Bruchstelle dar. In einer Liste von bekannten Bruchstellen, die beim Übergang von den ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen auftreten können, findet man etwa die Tatsache, dass die Anordnung der rationalen Zahlen anders als bei ganzen Zahlen keinen ausgezeichneten Nachfolger einer Zahl zulässt oder dass das Ergebnis einer Division zweier positiver Bruchzahlen größer als der Dividend ausfallen kann (Vosniadou et al., 2008; Lortie-Forgues et al., 2015).

Spannend ist in diesem Zusammenhang die Frage, wie man als Lehrkraft im Unterricht das prozedurale Wissen im Vergleich zum konzeptuellen Wissen gewichtet und auch, in welcher zeitlichen Abfolge diese beiden Bereiche thematisiert werden.

Die deutschsprachige Mathematikdidaktik legt traditionell einiges Gewicht auf das Anlegen geeigneter Grundvorstellungen, setzt tendenziell also einen konzeptuellen Schwerpunkt, aber es ist auch wohlbekannt, dass das konzeptuelle Wissen nicht immer notwendig am Anfang des Lernens steht. Ein differenziertes Bild je nach Lerninhalt gibt bereits Rittle-Johnson und Siegler (1998), wobei man inzwischen weitere Fortschritte beim Verständnis der Relation von prozeduralem und konzeptuellen

Wissen gemacht hat und auch individuellere Empfehlungen aussprechen kann (Rittle-Johnson et al., 2001; Hallett et al., 2012, Lenz & Wittmann, 2021).
Für das konkrete Unterrichtsgespräch benötigt die Lehrkraft also einerseits selbst ein hinreichend umfassendes und reichhaltiges konzeptuelles Verständnis, sie muss ferner wissen, welche Vorstellungen wichtig und tragfähig sind, welche Konzepte beibehalten werden können und wo Konzeptwechsel notwendig sind. Sie muss einschätzen können, bei welchen prozeduralen Schwierigkeiten konzeptuelles Wissen weiterhelfen kann, und sie muss schließlich Schüleräußerungen und Fragen schnell diagnostizieren, um dann adäquat reagieren zu können.
Dieses Zusammenspiel lässt sich in der vorliegenden Unterrichtsstunde gut beobachten, da Rechenaufgaben thematisiert werden, die zwar mit prozeduralem Wissen zügig bearbeitet werden können, zu deren inhaltlicher Durchdringung aber auch konzeptuelles Wissen nötig ist. Gerade beim Rechnen mit rationalen Zahlen gibt es einige tragfähige Vorstellungen, auf die man sich für den Aufbau des konzeptuellen Wissens stützen kann.

2. Die Einführung neuer Zahlbereiche

In der vorliegenden Unterrichtstunde werden Übungsaufgaben zum Addieren von Brüchen bearbeitet. Damit ist die Stunde Teil der Unterrichtseinheit, in welcher der *Zahlbereich* der rationalen Zahlen eingeführt wird. Im Folgenden werden unterschiedliche Konzepte und Vorgehensweisen zur Einführung neuer Zahlbereiche dargestellt.

Aus der Grundschule kennen die Schülerinnen und Schüler bereits die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0;1;2;3 \ldots\}$ und wissen, wie man mit diesen Objekten rechnet. In der weiterführenden Schule werden weitere Zahlbereiche eingeführt, etwa zunächst die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots -3;-2;-1;0;1;2;3 \ldots\}$, dann die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{a/b : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, b \neq 0\}$, also die Bruchzahlen – mehr zu Zahlbereichen z. B. in Reiss & Schmieder (2014).
Im Schulkontext stellen diese Zahlbereichserweiterungen Schritte dar, um neue und interessantere Phänomene quantitativ erfassen zu können. Gleichzeitig dienen gerade diese Phänomene dazu, die neuen Zahlen überhaupt erst einzuführen.
Wenn man im Schulkontext etwa fragt: ‚Was ist -1?', so fragt man nicht nach einer abstrakten Definition, sondern in der Regel nach einer tragfähigen Deutung. Hier können Modelle wie Temperaturskalen oder Guthaben/Schulden nützlich sein.

Dementsprechend ist die Frage ‚Was ist (-1) · (-1)?' am ehesten als Frage nach einer im entsprechenden Modell abgeleiteten Deutung des Malnehmens zu verstehen.
Eine zweite Perspektive auf die Einführung neuer Zahlbereiche, inklusive der Art und Weise, wie mit den neuen Objekten gerechnet wird, ist die der Fachmathematik. Hier werden die neuen Zahlen weniger gedeutet, sondern auf Basis der bereits bekannten Zahlen *konstruiert* und dann die Rechenoperationen *definiert*.
Wir wollen die beiden Perspektiven hier näher beschreiben, um dann später die Konsequenzen für den Schulunterricht an Beispielen aus der betrachteten Unterrichtsstunde zu veranschaulichen.

2.1. Neue Zahlbereiche aus Schülersicht

Die Einführung eines neuen Zahlbereichs an der Schule sollte schrittweise erfolgen, da dabei für die Lernenden manche Hürden zu überwinden sind, von denen einige konzeptioneller, andere prozeduraler Natur sind.
In einem ersten Schritt müssen Schülerinnen und Schüler die neuen Objekte erkennen und als neue Zahlen begreifen. Damit verbunden ist auch die Vermittlung der Schreibweise dieser neuen Zahlen. Im besten Fall entwickeln die Schülerinnen und Schüler dabei einen Bestand an unterschiedlichen tragfähigen Vorstellungen zu diesen neuen Zahlen. So kann eine Zahl als etwas interpretiert werden, was auf der Zahlengeraden einen festen Platz einnimmt. Für eine Bruchzahl ist eine tragfähige Vorstellung etwa die, einen Bruch als Beschreibung eines Anteils an einem Ganzen zu betrachten (Malle, 2004). Der Weg zu diesen Vorstellungen beginnt in der Regel bei dem, was Schülerinnen und Schüler aus ihrem Alltag bekannt ist (Buck et al., 2015). Sie sind zum Beispiel mit Brüchen im Zusammenhang mit Einheiten vertraut (eine Viertelstunde, ein halber Liter, ein Drittel eines Eishockeyspiels). Um dies zu einer reinen Zahlvorstellung weiterzuentwickeln, muss der Bruch von den Schülerinnen und Schülern isoliert von der Einheit als eigenes Objekt wahrgenommen und interpretiert werden.
Ist dieser Schritt gemacht, kann in einem zweiten Schritt die Frage der Anordnung geklärt werden, das heißt, die Schülerinnen und Schülern müssen lernen, wie solche Objekte der Größe nach geordnet werden. Orientieren wir uns an der Vorstellung von Zahlen als Punkten auf der Zahlengeraden, so wird die Anordnung durch die Lage der Zahlen auf der Zahlengeraden anschaulich gemacht: Alles, was ‚weiter rechts' liegt, ist größer. Bei den ganzen Zahlen ist entscheidend, dass (– 3) kleiner als (– 2) ist, obwohl 3 größer als 2 ist.

Bei den rationalen Zahlen geschieht es nun erstmals, dass zwei unterschiedlich aussehende Objekte weder mit dem kleiner- noch mit dem größer-Zeichen gereiht werden können, sondern dass sie identisch sind, da sie auf der Zahlengeraden den gleichen Platz besetzen, was am Beispiel der Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{7}{14}$ ersichtlich wird:

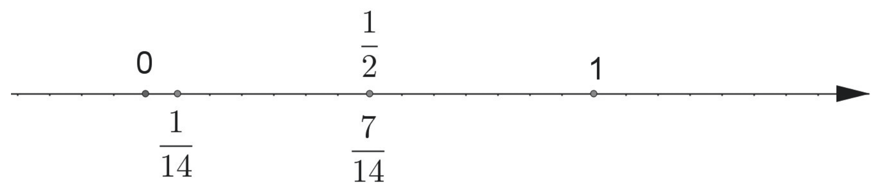

Abbildung 8

Hier führt der Aspekt der Anordnung also zum Thema ‚Kürzen und Erweitern'. Beides sind Umformungen, die den Wert des Bruchs unverändert lassen und daher zum Vergleich zweier Brüche unerlässlich sind.

Sind diese Sachverhalte verinnerlicht, kann mit dem letzten Schritt die Erschließung des neuen Zahlbereichs vollendet werden: Es bleibt zu klären, wie mit den neuen Objekten sinnvoll und korrekt gerechnet wird.

Bei den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ muss erarbeitet werden, wie man negative Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert. Besonders herausfordernd ist hier, das Verständnis für ‚minus mal minus gibt plus' zu generieren.

Dass dies schwierig ist, wenn man sich als Lehrperson lediglich auf die Deutung in Modellen bezieht, wird plausibel, wenn man die aus der Grundschule vermutlich bekannten Modelle für die Multiplikation daraufhin untersucht, wie tragfähig sie für die Deutung von $(-1) \cdot (-1)$ sind. So ist beispielsweise die Deutung der Multiplikation als fortgesetzte Addition zwar noch tragfähig, wenn wir $3 \cdot (-1)$ als $(-1) + (-1) + (-1)$ interpretieren, aber schon bei $(-1) \cdot 3$ wird es schwierig. Dies heißt nicht, dass man nicht Modelle finden kann, die im Prinzip tragfähig wären, aber diese Stelle beansprucht besondere Aufmerksamkeit, da hier ein Bruch mit den bisherigen Vorstellungen entstehen kann.

Dass auch das Rechnen mit rationalen Zahlen nicht anspruchslos ist, zeigt sich etwa darin, dass Schülerinnen und Schüler immer wieder Schwierigkeiten beim Rechnen mit Brüchen zeigen (Lortie-Forgues et al., 2015). Ein Grund (von vielen) hierfür ist, dass oft nur reine Regeln oder Verfahren abgespeichert werden, ohne diese mit dem nötigen Verständnis, das heißt mit dem nötigen konzeptuellen Wissen, anzuwenden. Insbesondere beim Bruchrechnen kann dies zu Verwechslungen führen, da sich die Verfahren der Strichrechnungen (+ und -) zu denen der Punktrechnungen (· und :) wesentlich unterscheiden.

Wir werden sehen, dass sich aus der fachmathematischen Perspektive wichtige Aspekte und Ansätze für den Aufbau von konzeptuellem Wissen ergeben.

2.2. Die Konstruktion neuer Zahlbereiche in der Fachmathematik

Wie oben bereits erwähnt, werden in der Fachmathematik Zahlbereiche konstruiert und zugehörige Rechenoperationen gesetzt. Dass Zahlbereichserweiterungen notwendig sind, lässt sich ohne direkten Bezug auf inhaltliche Deutungen der Zahlen dabei alleine schon so begründen, dass es Gleichungen gibt, die im ursprünglichen Zahlbereich nicht lösbar sind. In $\mathbb{N}$ lässt sich beispielsweise keine Lösung der Gleichung $4 + x = 3$ finden, da -1 kein Element von $\mathbb{N}$ ist. In $\mathbb{Z}$ lässt sich keine Lösung der Gleichung $4 \cdot x = 3$ finden, da ¾ kein Element von $\mathbb{Z}$ ist.

Ausgehend von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und den zugehörigen Rechenoperationen, die pragmatischerweise als ‚gottgegeben' (Weber, 1893) aufgefasst und axiomatisch definiert werden, werden weitere Zahlbereiche konstruiert. Dies geschieht stets im Rückgriff auf das bereits Bekannte, das heißt, bei der Konstruktion von $\mathbb{Z}$ bezieht man sich auf $\mathbb{N}$ und das Rechnen in $\mathbb{N}$; hat man $\mathbb{Z}$ konstruiert, konstruiert man daraus den Zahlbereich $\mathbb{Q}$, indem man auf $\mathbb{Z}$ und das Rechnen in $\mathbb{Z}$ Bezug nimmt.

Wie kann man nun etwa die Zahl -1 definieren, indem man nur auf natürliche Zahlen zurückgreift? Der formale Trick ist der, dass man Zahlen als (formale) Differenzen von natürlichen Zahlen schreibt. Es gilt etwa 3 = (5 - 2), und so können wir 3 auch als Paar (5; 2) auffassen (oder als Paar (10; 7) oder (4; 1) …). Ist nun die zweite Zahl in einem solchen Paar größer als die erste, so erhalten wir als Differenz eine negative Zahl. Damit können wir etwa -1 durch das Paar (3; 4) beschreiben (oder durch (10; 11)) oder irgendeines von unendlich vielen anderen Paaren natürlicher Zahlen, bei denen die zweite Zahl um eins größer ist als die erste). Der Clou ist nun, dass diese Beschreibung gar nicht verlangt, dass wir schon wissen, was negative Zahlen sind. Auch ohne dieses Wissen können wir -1 durch das Paar (3; 4) *definieren* (oder durch eines der genannten Paare).

In einer sauberen fachmathematischen Entwicklung muss man sich nun noch Gedanken machen, wie man geschickt formuliert, welche Paare natürlicher Zahlen jeweils dieselbe ganze Zahl beschreiben, ohne schon dabei auf das Rechnen mit negativen Zahlen zurückzugreifen (Reiss & Schmieder, 2014, Abschnitt 6.1).

Diese fachmathematisch nötigen Schritte werden hier nicht weiter verfolgt. Der kurze wissenschaftliche Einblick soll bewusst machen, dass in der Fachmathematik neue Zahlbereiche aus bereits vorhandenen Zahlbereichen formal und ohne An-

schauung konstruiert werden. Sind neue Zahlbereiche konstruiert, so müssen in einem nächsten Schritt die Rechenoperationen für diesen neuen Zahlbereich definiert werden. Diese werden nun fest*gesetzt*. Beispielsweise kann man $(3; 4) \cdot (5; 6) = (3 \cdot 5 + 4 \cdot 6; 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5) = (39; 38)$ setzen, also $(-1) \cdot (-1) = 1$. Dies ist zunächst eine rein willkürliche Setzung. Man könnte es auch ganz anders machen und die Sache so einrichten, dass $(-1) \cdot (-1) = 5$ gilt. Prinzipiell hätte man diese Freiheit, aber nun gilt es Argumente zu prüfen, welche der unzählig vielen Möglichkeiten, $(-1) \cdot (-1)$ zu setzen, sinnvoll wäre.
Eine denkbare Argumentationslinie könnte sein, in einem relevanten und für die bisherigen Rechenoperationen tragfähigen Modell die Setzung durch eine praktische Deutung zu stützen. Interpretiert man z. B. negative Zahlen als Schulden, so kann man die Multiplikation $2 \cdot (-1)$ im Kontext ‚Schulden' interpretieren. Man hat ‚zwei mal einen Euro Schulden', was bedeutet, dann man insgesamt ‚zwei Euro Schulden' hat. Dies stützt die Setzung ‚minus mal plus gibt minus'.
Eine andere Argumentationslinie wäre die Forderung nach einer möglichst ästhetischen oder einfachen Definition. Eine ästhetische und einfache Definition wäre eine, bei der möglichst viele Rechengesetze, die für die bereits bekannten Zahlen gelten, auch im neu konstruierten Zahlbereich erhalten bleiben, wie zum Beispiel das Distributivgesetz. Diese Forderung nach der Übertragbarkeit von Rechengesetzen nennt man das *Hankelsche Permanenzprinzip* (Ziegenbalg, 1999).
Für den schulisches Einsatz ist dieses Vorgehen des Definierens beziehungsweise Setzens offenkundig zu abstrakt. Wie bereits geschildert, werden in der Schule die neuen Objekte beziehungsweise Zahlen nicht theoretisch konstruiert. Stattdessen knüpft man an bereits vorhandene Alltagserfahrungen der Schülerinnen und Schüler an und baut darauf Grundvorstellungen zu den neuen Objekten auf.
Für die Lehrperson ist es aber wichtig, auch auf die fachmathematische Perspektive zurückgreifen zu können. Dies heißt insbesondere, bei Bedarf die Freiheit erlebbar machen zu können, Setzungen selbst vorzunehmen und sie dann auf ihre Konsequenzen hin zu prüfen. Was handeln wir uns etwa ein, wenn wir $\frac{1}{0}$ so oder so definieren? Wie könnte man $(-1) \cdot (-1)$ noch setzen? Wofür könnte $3^{1/2}$ stehen? Oder: Kann man mit $\sqrt{-1}$ rechnen?
Den fachmathematischen Hintergrund zu kennen heißt in all diesen Fällen nicht nur zu wissen, wie man es standardmäßig macht, sondern auch, Alternativen durchspielen und bewerten zu können.
Wir wollen nun Sequenzen in der vorliegenden Unterrichtsstunde analysieren, an welchen uns die genannten Blickwinkel ein vertieftes Nachdenken über Handlungen und Handlungsmöglichkeiten erlauben.

3. Erster Fall: Der gemeinsame Bruchstrich

3.1. Fallbeschreibung

Die Klasse hat sich in der vorangegangenen Stunde mit der Addition beziehungsweise Subtraktion rationaler Zahlen beschäftigt und bereits ein Verfahren erarbeitet, das im späteren Verlauf der beobachteten Stunde anhand eines von der Lehrkraft vorformulierten Merkzettels festgehalten wird:

1. Bringe zuerst die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner.
2. Addiere beziehungsweise subtrahiere die Zähler.
   Tipp: Schreibe die Brüche mit einem gemeinsamen Bruchstrich.

Zu Beginn der beobachteten Stunde notiert die Lehrkraft die Rechnung $\frac{5}{8} - \frac{5}{6}$ an die Tafel, anhand derer die Schülerinnen und Schüler das Vorgehen beim Addieren/Subtrahieren beschreiben sollen. Beide Brüche werden von den Schülerinnen und Schülern problemlos auf den gleichen Nenner gebracht ($\frac{15}{24} - \frac{20}{24}$) und auch die Subtraktion wird sicher durchgeführt ($-\frac{5}{24}$) (Mathematik_Lehrkraftkamera_Minute 13:41–16:03).

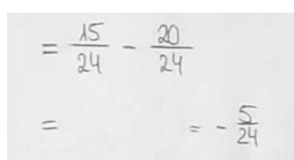

Abbildung 1: Die Lehrkraft lässt eine Lücke für den Zwischenschritt (Mathematik_Lehrkraftkamera_Minute 16:04).

⊚ L: Aha, richtig. [L notiert das Endergebnis, lässt aber eine Lücke für einen Zwischenschritt] Was könnte man noch machen bevor man, ähm, die Zähler subtrahiert, damit es, ja, damit es manchmal ein bisschen leichter noch ist mit den Zählern, was könnte man da vorher noch machen? [Ruft S auf]
S: Ein längerer Strich, also ein längerer Bruchstrich
L: Ja
S: und dann beide Zahlen, also fünfzehn minus zwanzig.
[L notiert den Zwischenschritt]
S: Vierundzwanzigstel.
L: Ja, genau, richtig.
(Mathematik_Lehrkraftkamera_Minute 15:57–16:30)

3.2. Fachliche und fachdidaktische Analyse

Sowohl hier als auch im weiteren Verlauf der Stunde wird durchgängig sichtbar, dass dieser von der Lehrkraft gewünschte Zwischenschritt nicht immer problemlos verläuft. Warum ist die Lehrkraft dennoch der Ansicht, dass die Durchführung der Rechenoperation mit einem gemeinsamen Bruchstrich ‚leichter' ist?
Hat man die zwei zu addierenden/subtrahierenden Brüche auf den gleichen Nenner gebracht und verwendet dann die Schreibweise mit dem gemeinsamen Bruchstrich, um die Addition/Subtraktion durchzuführen, dann führt man damit die Rechnung mit Brüchen, das heißt, eine Rechnung in $\mathbb{Q}$, auf eine Rechnung mit ganzen Zahlen, das heißt, auf eine Rechnung in $\mathbb{Z}$ zurück, was natürlich nur funktioniert, wenn die beiden Brüche schon gleichnamig sind. Dies spiegelt das fachwissenschaftliche Vorgehen wider, bei dem Rechenoperationen einer Zahlbereichserweiterung (hier $\mathbb{Q}$) auf die des erweiterten Zahlbereichs (hier $\mathbb{Z}$) zurückgeführt werden. Man startet bei einer beliebigen Addition/Subtraktion in $\mathbb{Q}$, formt die Bestandteile der Rechnung um (gleiche Nenner), um dann die eigentliche Rechnung in Z durchzuführen.
Dieser Prozess entspricht einer (mathematischen) Problemlösestrategie (Bruder & Collet, 2011): Man transformiert ein Problem, dessen Lösung unbekannt ist, zu einem Problem, dessen Lösung man kennt und kann mithilfe der bekannten Lösung das ursprüngliche Problem bewältigen.
Damit scheint dieses Vorgehen seine Berechtigung zu haben – allerdings nur auf den ersten Blick, denn führt man die Rechenoperation in $\mathbb{Q}$ auf eine Rechnung in $\mathbb{Z}$ zurück, geht dabei verloren, dass eigentlich mit rationalen Zahlen gerechnet werden sollte.
Anders als im fachwissenschaftlichen Kontext werden in der Schule die rationalen Zahlen nicht aus den ganzen Zahlen abstrakt konstruiert, sondern die Schülerinnen und Schüler lernen basierend auf ihren Alltagserfahrungen die rationalen Zahlen als neue, sinntragende Objekte kennen, zu denen sie Grundvorstellungen entwickeln. Das Ziel ist, dass sie mit diesen Objekten vertraut werden und die damit verbundenen Grundvorstellungen eine solche Tragkraft entwickeln, dass sie den sicheren und verständigen Umgang mit dem Objekt ‚rationale Zahl' ermöglichen – und das insbesondere beim Rechnen.
In der Unterrichtsstunde zeigt sich immer wieder, dass die Schülerinnen und Schüler auch ohne den Verfahrensschritt ‚gemeinsamer Bruchstrich' in der Lage sind, eine Rechnung wie $\frac{5}{8} - \frac{5}{6}$ korrekt durchzuführen. Dabei stützen sie sich auf die Grundvorstellung des Bruchs als Quasikardinalzahl und verstehen $\frac{5}{8}$ als fünf Stück ‚ein Achtel', wobei das ‚ein Achtel' die Rolle einer Einheit einnimmt (Malle, 2004).

Der Bruch $\frac{5}{6}$ bedeutet dann fünf Stück ‚ein Sechstel' und es wird deutlich, dass ‚Achtel' und ‚Sechstel' unterschiedlich sind. Da man nur gleiche Einheiten addieren/subtrahieren kann, entsteht die Notwendigkeit, eine gemeinsame Einheit zu finden. Ähnlich verfahren die Schülerinnen und Schüler bei Rechnungen wie 1 dm + 0,2 m, bei denen sie zunächst auch nach einer gemeinsamen Einheit suchen. Bei $\frac{5}{8}$ und $\frac{5}{6}$ ist diese gemeinsame Einheit ‚ein Vierundzwanzigstel', die sich ergebende Rechnung $\frac{15}{24} - \frac{20}{24}$ lässt sich nun mit der Einheiten-Vorstellung lösen: 15 Stück der gemeinsamen Einheit minus 20 Stück davon ergeben -5 Stück der gemeinsamen Einheit.
Nun führt man eine Rechnung in den ganzen Zahlen (15 - 20 = -5) durch, was man beim Vorgehen mit dem Verfahrensschritt ‚gemeinsamer Bruchstrich' auch tut. Der wichtige Vorteil des hier geschilderten Wegs ist jedoch, dass dabei die Objekte mit einer tragfähigen Grundvorstellung verknüpft sind, was den verständigen Umgang mit den rationalen Zahlen vertieft und fördert.

4. Zweiter Fall: Der Umgang mit Vorzeichen

Die Übungsaufgaben, die in der gezeigten Stunde bearbeitet werden, behandeln die Addition und Subtraktion von Brüchen. Elementare Übungen dazu wurden in vorangegangenen Stunden beziehungsweise in der Hausaufgabe bearbeitet. Bei den Aufgaben dieser Doppelstunde liegt ein Fokus auf dem Rechnen mit negativen Brüchen, somit spielt der Umgang mit den Vorzeichen eine wichtige Rolle.

4.1. Erste Situation: Vorzeichen bei Brüchen

Als eine der ersten solcher Aufgaben wird das Ergebnis von $-\frac{5}{12} + \frac{1}{8}$ bestimmt.
Die Lehrerin leitet dabei das Unterrichtsgespräch (unter Verwendung der Dokumentenkamera) wie folgt ein:

◎ L: Dann schauen wir uns jetzt folgende Aufgabe an (4) und zwar kann man natürlich auch mit negativen Brüchen rechnen, also sprich addieren und subtrahieren. Schaut euch mal die Aufgabe an, wie würdet ihr die jetzt lösen?
(Mathematik_Lehrkraftkamera_Minute 26:52)

Der gemeinsame Nenner ist schnell gefunden ($-\frac{10}{24} + \frac{3}{24}$), so dass nun der Umgang mit dem Vorzeichen die zentrale Rolle in der weiteren Bearbeitung der Aufgabe spielt. Die von der Lehrkraft vorgegebene Strategie verlangt den gemeinsamen Bruchstrich. Intuitiv entsteht dabei der Bruch $^{-10+3}/_{24}$, wobei dies korrekterweise die Gleichheit von $-^{10}/_{24}$ und $^{-10}/_{24}$, beziehungsweise allgemein von -(n/m) und -n/m erfordert. Diese Gleichheit wird auch dann benutzt, wenn beim Weiterrechnen aus $^{-7}/_{24}$ das Ergebnis $-^{7}/_{24}$ wird.

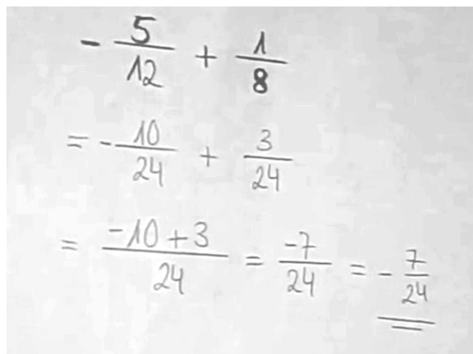

Abbildung 2: Die von der Lehrkraft entwickelte Rechnung (Mathematik_Lehrkraftkamera_Minute 29:17)

Zum Ende dieser Episode ergibt sich folgendes Gespräch:

◎ L: Wir haben vorhin schon gesehen, man kann das Minus vor dem Bruch einfach hochziehen in den Zähler. Beim Ergebnis ziehen wir es wieder runter und schreiben es vor den Bruch, dann heißt der Bruch minus sieben Vierunzwanzigstel, das wäre das Ergebnis.

S: Aber, ähm,

L: Ja.

S: Ändert es was, ähm, an (.) dem Wert oder an dem Ergebnis, wenn Minus vor dem Zähler und nicht vor dem ganzen Bruchstrich steht?

L: (.) Ähm nein, also, das Minus kann man generell immer nur hochziehen in den Zähler.

S: Weil, aber, macht es was anderes aus, also ist jetzt, ähm, das Endergebnis was anderes als der Bruch davor, also wo das Minus vor der Sieben war.

L: (3) Meinst Du, dass, wenn du jetzt hier, wenn du das Minus hier vorne lässt [L deutet auf den Beginn der letzten Zeile]

S: Nein, nein, daneben, rechts daneben.

L: Da? [L deutet auf die letzte Gleichung]

S: Ja.

L: Das da, ob das was anderes ist als das da? Nein, das ist genau dasselbe. Weil man

> das Minus wie gesagt entweder hoch in den Zähler ziehen kann oder wieder vor den Bruch, aber man kann es nicht in den Nenner ziehen.
> (Mathematik_Lehrkraftkamera_Minute 29:02–30:08)

4.2. Fachliche und fachdidaktische Analyse der Situation ,Vorzeichen bei Brüchen'

Zunächst bleibt festzuhalten, dass man das Minus sehr wohl in den Nenner ziehen kann, was auch im eingesetzten Schulbuch dargestellt, sehr nachvollziehbar erläutert und auch in Aufgaben thematisiert wird (Buck et al., 2015).
Doch selbst wenn die Lehrkraft das In-den-Nenner-Ziehen des Minus-Zeichens nicht thematisieren möchte, wäre es an dieser Stelle sinnvoll, den Schülerinnen und Schülern eine nachvollziehbare Begründung zu liefern, warum es sich bei den beiden Schreibweisen trotz der unterschiedlichen Positionen des Minuszeichens um die gleiche Zahl handelt. Sie formuliert zwar, dass die Schülerinnen und Schüler ‚gesehen' haben, dass man wie vorgeführt mit dem Minus vor einem Bruch umgehen könne. Dabei handelt es sich aber um rein prozedurales Vorgehen, das nicht durch eine mitgelieferte Begründung konzeptuell verständlich gemacht wird. Wir halten dies aber für zentral für den Aufbau eines tieferen Verständnisses der Rechenoperationen in $\mathbb{Q}$, das nachhaltig und tragfähig ist, zumindest bei einem substantiellen Teil der Schülerinnen und Schüler (Malle, 2004; Lenz und Wittmann, 2021).
Möglicherweise erzeugt aber auch der Verfahrensschritt ‚gemeinsamer Bruchstrich' bei der Vorzeichenfrage eine zusätzliche Schwierigkeit. Ohne den Rechenausdruck mit dem gemeinsamen Bruchstrich könnten sich die Schülerinnen und Schüler wieder auf die Grundvorstellung des Bruchs als Quasikardinalzahl stützen und $-{}^{10}/_{24} + {}^{3}/_{24}$ berechnen, indem sie gedanklich ‚minus zehn Stück Vierundzwanzigstel plus drei Stück Vierundzwanzigstel' zu ‚minus sieben Stück Vierundzwanzigstel' berechnen, den Nenner also als Einheit behandeln (analog zu ‚minus zehn Grad plus drei Grad gibt minus sieben Grad'). Beim Zwischenschritt ‚gemeinsamer Bruchstrich' birgt das Verschieben des Minus in den Zähler einige Schwierigkeiten, wie sich auch in der Stunde zeigt: Ein Schüler meinte, dass man bei ‚-10 + 3' im gemeinsamen Nenner dann ‚-10 - 3' rechnen müsse (Mathematik_Lehrkraftkamera_Minute 28:34–28:41). Bei ihm könnte das Missverständnis vorliegen, dass er das in den Zähler geschriebene Minus als Minus vor dem gesamten Zähler interpretiert, das heißt, es wäre -(10 + 3) zu berechnen, was die Anwendung der Minusklammer-Regel notwendig machen würde. Auch im weiteren Verlauf der Stunde (z. B. Mathematik_Lehrkraftkamera_Minute 01:16:35–01:17:02) zeigen sich Schwierigkeiten mit dem ‚gemeinsamen Bruchstrich' in Kombination mit den Vorzeichen. Die Lehrkraft gibt einer Schülerin

als nächsten Schritt bei $-\frac{3}{24} - \frac{1}{24}$ den Hinweis, dies auf einen gemeinsamen Bruchstrich zu schreiben, worauf die Schülerin die Antwort -2 gibt. Auch sie könnte -(3-1) statt -3-1 gerechnet haben.
Aber auch losgelöst vom Zwischenschritt ‚gemeinsamer Bruchstrich' muss erklärt werden, warum $-\frac{10}{24}=\frac{-10}{24}$ gilt. Hier könnte auf eine weitere Grundvorstellung zu den rationalen Zahlen zurückgegriffen werden, die zwar etwas abstrakt ist und gezielt im Unterricht entwickelt werden muss, die aber grundlegend für die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung ist und sich als nachhaltig und belastbar erweist: Man kann eine rationale Zahl n/m als Ergebnis der Division der zwei ganzen Zahlen n und m betrachten, das heißt, es ist n:m=n/m beziehungsweise die rationale Zahl n/m ist die Lösung der Gleichung m·x=n. Mit Hilfe dieser Grundvorstellung der rationalen Zahl als Ergebnis einer Division lässt sich – aufbauend auf den bereits vorhandenen Regeln zur Multiplikation in $\mathbb{Z}$ – verständlich begründen, dass -(n/m)=-n/m=n/-m gilt. Denn: Einerseits ist das Ergebnis von (-n):m die rationale Zahl -n/m. Andererseits berechnet man (-n):m, indem man zunächst n:m=n/m bestimmt und anschließend das korrekte Vorzeichen ergänzt: -(n/m). Somit ist -(n/m)=-n/m gezeigt, ganz analog folgt -(n/m)=n/-m.

4.3. Zweite Situation: Vorzeichen bei der Addition und Subtraktion

Ob man nun auf Basis der Grundvorstellung des Bruchs als Quasikardinalzahl oder mit dem ‚gemeinsamen Bruchstrich' rechnet, in beiden Fällen müssen positive und negative Zahlen addiert und subtrahiert werden, was einen sicheren Umgang beim Rechnen mit ganzen Zahlen voraussetzt. Hilfesuchend wendet sich eine Schülerin in der Arbeitsphase an die Lehrkraft und gesteht, dass sie sich das nie merken kann ‚mit minus und plus'. Es entsteht folgender Dialog:

◎ S: Das war auch bei mir in der Arbeit so, ich kann es mir nie merken, also minus und plus sind so und so.
L: Also weißt du, minus minus gibt?
S: (..) Minus.
[L schüttelt den Kopf]
S: Plus.
L: Plus minus gibt?
S: Minus.
L: Minus plus gibt?
S: Minus.

L: Plus plus gibt?
S: Plus.
L: Plus. Das musst Du Dir erst mal merken!
(Mathematik_Lehrkraftkamera_Minute 01:17:47–01:18:08)

4.4. Fachliche und fachdidaktische Analyse der Situation ‚Vorzeichen bei der Addition und Subtraktion'

Die hier im Einzelgespräch stattgefundene Unterstützung durch die Lehrkraft bezieht sich rein auf das prozedurale Wissen der Schülerin. Die Lehrkraft hilft ihr beim Merken der Regeln, indem sie diese aussprechen lässt. In der Hektik des Unterrichtsalltags geht das zügig und es bewirkt, dass die Schülerin mit dieser Information weiterarbeiten kann. Zusätzlich ist die Lehrkraft nach dieser kurzen Intervention wieder frei, um weiteren Lernenden ihre Unterstützung zukommen zu lassen. Allerdings könnten Bezüge zu tragfähigen Konzepten der Schülerin Impulse geben, durch die der Aufbau des zugehörigen konzeptuellen Wissens angestoßen werden könnte. Dies würde langfristig zu einer reflektierten und damit auch sichereren Anwendung der Regeln führen.

Für eine konzeptuell weiterführende Antwort auf die Frage der Schülerin hätte es eine Reihe von Möglichkeiten gegeben, welche jeweils auf die oben skizzierten Blickwinkel auf die Einführung neuer Zahlbereiche und Operationen Bezug nehmen. In der Vorstellung von Guthaben/Schulden für positive beziehungsweise negative Zahlen könnte man etwa das *Vermindern* (das Minus als Rechenzeichen) von *Schulden* (das Minus als Vorzeichen) als einen *Vermögenszuwachs* identifizieren (Bicker & Ossmann, 2004). Mit dem oben beschriebenen Hankelschen Permanenzprinzip kann man entweder direkt oder indirekt argumentieren. Eine direkte Argumentation wäre etwa: Für jede Zahl x soll x-x=0 gelten, also beispielsweise auch -3-(-3)=0. Es gilt aber auch -3+3=0, weshalb es plausibel ist, dass -(-3) und +3 dieselbe Operation beschreiben. Eine indirekte Argumentation ginge beispielsweise über sogenannte Permanenzreihen (Ziegenbalg, 1999): Wenn man in der Folge -(-2), -(-1), -(0) die Zahl in der Klammer jeweils um 1 verringert, wächst das Ergebnis jeweils um 1. Es ist also plausibel, dass -(-1), -(-2), -(-3) jeweils wiederum um 1 größer wäre, also gleich 1, 2 beziehungsweise 3.

5. Fazit

Insgesamt sieht man in dieser Stunde, dass Schülerinnen und Schüler Rechnungen durchführen, indem sie Verfahrensschritte abarbeiten, die sie sich merken sollen. Dies kann den Eindruck vermitteln, dass das Betreiben von Mathematik lediglich das Anwenden auswendig gelernter Regeln und Vorgehensweisen bedeutet. In der gezeigten Stunde steht der Erwerb prozeduralen Wissens deutlich im Vordergrund. Möglicherweise hat sich die Lehrkraft dazu entschieden, zunächst das Rechnen einzuüben, um danach – basierend auf den Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler beim Bruchrechnen – das konzeptuelle Wissen dazu aufzubauen, welches für das Verständnis und die inhaltliche Durchdringung des Lerngegenstandes unverzichtbar ist.
Es ist allerdings das konzeptuelle Wissen, was die Fachdisziplin Mathematik auszeichnet und charakterisiert: Alles lässt sich deduktiv aus wenigen axiomatisch gegebenen Sachverhalten ableiten und verstehen. Lernende können ihr mathematisches Wissen und ihre Fähigkeiten ausgehend von Grundgegebenheiten selbst konstruieren, inhaltlich durchdringen und verständig anwenden – die Lehrkraft steuert diesen Prozess.
Im gezeigten Beispiel bedeutet dies, dass auf der Basis tragfähiger Grundvorstellungen zu den rationalen Zahlen und zu den Rechenoperationen, Regeln zum Rechnen mit Brüchen entdeckt und verstanden werden können. Dieses Verständnis ist zentral, wenn es darum geht, die verschiedenen Rechenoperationen auch langfristig sicher anwenden zu können. Beim Bruchrechnen heißt dies insbesondere, dass man die verschiedenen Rechenoperationen gegeneinander abgrenzen und verständig das korrekte Verfahren für die jeweilige Rechenart auswählen kann. Dass einige Schülerinnen und Schüler dabei immer wieder Unsicherheiten zeigen, macht deutlich, wie wichtig ein befruchtendes Miteinander von konzeptuellem und prozeduralem Wissen ist.

Literatur

Bicker, U., & Ossmann, H. (2004). Aufgabeneinheit 3: Gib-Nimm-Spiel. *Basierend auf „Nimm und Gib“ von A. Herzog und D. Terö[r]de. In Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend Rheinland-Pfalz (Hrsg.), Sinus-Transfer. Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts*

Buck, H., Freudigmann, H., Greulich, D., Haug, F., Sandmann, R. & Schatz, T. (2015). *Lambacher-Schweizer 6, Mathematik für Gymnasien, Baden-Württemberg*. Klett-Verlag.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Cornelsen Verlag Scriptor.*

Byrnes, J. P. & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental psychology,* 27(5), 777–786.

Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P. & Thorpe, C. M. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology,* 113(4), 469–486.

Lenz, K. & Wittmann, G. (2021). Individual Differences in Conceptual and Procedural Fraction Knowledge: What Makes the Difference and What Does it Look Like?. *International Electronic Journal of Mathematics Education,* 16(1), em0615.

Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review,* 38, 201–221.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren*, 123, 4–8.

Piaget, J. & Cook, M. T. (1952). *The origins of intelligence in children*. International University Press.

Reiss, K. & Schmieder, G. (2014). *Basiswissen Zahlentheorie. Eine Einführung in Zahlen und Zahlbereiche* (3. überarbeitete Auflage). Springer-Verlag.

Rittle-Johnson, B. & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Eds.), *The development of mathematical skills* pp. 75–110). Psychology Press/Taylor & Francis (UK).

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346–362.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X. & Skopeliti, I. (2008). The Framework Theory Approach to the Problem of Conceptual Change. In S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change* (pp. 305–321), Routledge.

Weber, H. (1893). Leopold Kronecker. In Deutsche Mathematiker-Vereinigung (Hrsg*.), Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (Band 2, S. 5–31). Reimer.

Ziegenbalg, J. (1999). Fachdidaktische Prinzipien als Grundlage einer Design Science – erläutert am Hankelschen Permanenzprinzip. In C. Selter & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science, Festschrift für Erich Christian Wittmann. Ernst Klett Grundschulverlag GmbH.*