

**Gerechte Zuordnungen:
Kollektive Entscheidungsprobleme aus der Perspektive
von Mathematik und theoretischer Informatik**

Dissertation

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Sebastian Schneckenburger
aus Filderstadt

Tübingen
2018

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Eberhard Karls Universität Tübingen.

Tag der mündlichen Qualifikation:

11.01.2019

Dekan:

Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel

1. Berichterstatter:

JD Dr. Britta Dorn

2. Berichterstatter:

Prof. Dr. Peter Hauck

Vorwort

Im wissenschaftlichen Sprachgebrauch der *Sozialwahltheorie* herrscht die Verwendung von englischen Fachausdrücken bzw. Anglizismen vor. Wir werden deswegen Fachausdrücke für Begriffe oft in beiden Sprachen einführen, benutzen dann aber in der Regel den deutschen Fachausdruck.

Für dieses Werk spielt eine Geschlechtszuweisung keine Rolle. Sofern es grammatikalisch erforderlich ist, verwenden wir bei den deutschsprachigen Ausführungen die männliche, in den angehängten englischsprachigen Publikationen die weibliche Form.

Zusammenfassung

Wir untersuchen verschiedene Fragestellungen der Sozialwahltheorie aus Sicht der Computational Social Choice. Für ein Problem, das in Bezug zu einem Kollektiv von Agenten steht (z. B. Aufteilungen von Ressourcen oder Repräsentantenwahlen), stehen verschiedene Alternativen als Lösung zur Verfügung; ein wesentlicher Aspekt sind dabei die diversen Präferenzen der Agenten gegenüber den Alternativen. Die Qualität der Lösungen wird anhand von Kriterien aus den Sozialwissenschaften (Fairness), der Spieltheorie (Stabilität) und den Wirtschaftswissenschaften (Effizienz) charakterisiert. In Computational Social Choice werden solche Fragestellungen mit Werkzeugen der Mathematik (z. B. Logik und Kombinatorik) und Informatik (z. B. Komplexitätstheorie und Algorithmik) behandelt. Als roter Faden zieht sich die Frage nach sogenannten „gerechten Zuordnungen“ durch die Dissertation.

Für die Zuordnung von Gütern zu Agenten zeigen wir, wie mithilfe eines dezentralisierten Ansatzes Zuordnungen gefunden werden können, die Ungleichheit minimieren. Wir analysieren das Verhalten dieses Ansatzes für Worst-Case-Instanzen und benutzen dabei eine innovative Beweismethode, die auf impliziten rekursiven Konstruktionen unter Verwendung von Argumenten der Infinitesimalrechnung beruht.

Bei der Zuordnung von Agenten zu Aktivitäten betrachten wir das vereinfachte Szenario, in dem die Agenten Präferenzen bezüglich der Aktivitäten haben und die Menge der zulässigen Zuordnungen Beschränkungen bezüglich der Teilnehmerzahlen pro Aktivität unterliegt. Wir führen verschiedene Lösungskonzepte ein und erläutern die Zusammenhänge und Unterschiede dieser Konzepte. Die zugehörigen Entscheidungsprobleme zur Existenz und Maximalität entsprechender Zuordnungen unterziehen wir einer ausführlichen Komplexitätsanalyse.

Zuordnungsprobleme können auch als Auktionen aufgefasst werden. Wir betrachten ein Szenario, in dem die Agenten Gebote auf Transformationen von Gütermengen abgeben. In unserem Modell sind diese durch die Existenz von Gütern charakterisiert, die durch die Transformationen nicht verbraucht werden. Von Interesse sind die Kombinationen von Transformationen, die den Gesamtnutzen maximieren. Wir legen eine (parametrisierte) Komplexitätsanalyse dieses Modells vor.

Etwas abseits der Grundfragestellung liegen unsere Untersuchungen zu kombinierten Wettkämpfen. Diese interpretieren wir als Wahlproblem, d. h. als Aggregation von Ordnungen. Wir untersuchen die Anfälligkeit für Manipulationen durch die Athleten.

Summary

We investigate questions from social choice theory from the viewpoint of computational social choice. We consider the setting that a group of agents faces a collective decision problem (e.g., resource allocation or the choice of a representative): they have to choose among various alternatives. A crucial aspect are the agents' individual preferences over these alternatives.

The quality of the solutions is measured by various criteria from the fields of social sciences (fairness), game theory (stability) and economics (efficiency). In computational social choice, such problems are analyzed and accessed via methods of mathematics (e.g., logic and combinatoric) and theoretical computer science (e.g. complexity theory and algorithms). The question of so called 'fair assignments' runs like a common thread through most parts of this dissertation.

Regarding allocations of goods to agents, we show how to achieve allocations with minimal inequality by means of a distributed approach. We analyze the behavior of this approach for worst case instances; therefor we use an innovative proof technique which relies on implicit recursive constructions and insights from basic calculus.

For assignments of agents to activities, we consider a simplified scenario where the agents express preferences over activities and the set of feasible assignments is restricted by the number of agents which can participate in a (specific) activity. We introduce several solution concepts and elucidate the connections and differences between these concepts. Furthermore, we provide an elaborated complexity analysis of the associated decision problems addressing existence and maximality of the corresponding solution concepts.

Assignment problems can also be seen as auctions. We consider a scenario where the agents bid on transformations of goods. In our model, each transformation requires the existence of a 'tool good' which is not consumed by the transformation. We are interested in combinations of transformations which maximize the total utility. We study the computational complexity of this model in great detail, using methods from both classical and parameterized complexity theory.

Slightly off topic are our investigations on combined competitions. We interpret these as a voting problem, i. e., as the aggregation of orders. We investigate the susceptibility of these competitions to manipulation by the athletes.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	iv
Summary	v
Abkürzungen – Symbole – Piktogramme	x
Liste der akzeptierten Publikationen	xi
Anteile des Autors und der Mitautoren an den Publikationen	xii
I. Einleitung und Zielsetzung	1
1. Einleitung	3
1.1. Sozialwahltheorie	5
1.1.1. Wahlprobleme	5
1.1.2. Zuteilungsprobleme: Gerechtes Teilen	8
1.1.3. Zuordnungsprobleme: Matching und Koalitionsbildung	11
1.1.4. Kriterien guter Lösungen	12
1.2. Computational Social Choice	13
2. Zielsetzung	15
II. Ergebnisse und Diskussion	17
3. The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation	21
3.1. Fairness in MARA	23
3.2. Das Modell MARA	24
3.2.1. Computational Complexity	25
3.2.2. Der dezentralisierte Ansatz	26
3.3. Ergebnisse	29
3.3.1. Semi-lokale Deals	29

3.3.2. Übersicht über die Ergebnisse	30
3.3.3. Beweistechniken	31
3.4. Fazit und Ausblick	37
4. Simplified Group Activity Selection	39
4.1. Das Modell	41
4.2. Verwandte Werke und vergleichbare Sozialwahlprobleme	45
4.3. Übersicht über die Ergebnisse der Komplexitätsanalysen	47
4.3.1. Übergangsstellen der Komplexität	49
4.4. Zusammenhänge und Unterschiede zwischen den Publikationen	51
4.5. Fairness vs. Effizienz	53
4.6. Fazit und Ausblick	54
5. Tool Auctions	55
5.1. Hintergründe und Motivation des Modells	58
5.2. Tool Auctions – Das Modell	59
5.2.1. Designwahlen	62
5.3. Diskussion der Ergebnisse der Komplexitätsanalyse	63
5.3.1. Resultate der klassischen Komplexitätsanalyse	63
5.3.2. Vergleich mit den Ergebnissen von Fionda und Greco	64
5.3.3. Übersicht über die FPT-Resultate	67
5.4. Fazit und Ausblick	68
6. Fall If It Lifts Your Teammate	69
6.1. Das Modell	71
6.2. Simulationen	78
6.3. Das Unmöglichkeitstheorem im Vergleich zu Arrows Theorem	79
6.4. Fazit und Ausblick	82
III. Verzeichnisse	85
Literaturverzeichnis	87
Abbildungsverzeichnis	95
Tabellenverzeichnis	95

IV. Appendix und Publikationen	97
A. Appendix	99
A.1. Algorithmik und Komplexitätstheorie	100
A.2. The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation . .	107
A.3. Simplified Group Activity Selection	117
A.4. Fall If It Lifts Your Teammate	120
B. Publikationen	123
B.1. The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation . .	123
B.2. On Simplified Group Activity Selection	133
B.3. Simplified Group Activity Selection	149
B.4. Tool Auctions	173
B.5. Fall If It Lifts Your Teammate	182

Abkürzungen – Symbole – Piktogramme

Abkürzungen

ComSoC Computational Social Choice	Selection Problem
MARA Multiagent Resource Allocation	COF Combined Olympic Format
SWF Social-Welfare-Funktion	MMUCA Mixed Multiunit Combinatorial Auction
SCF Social-Choice-Funktion	
GASP Group Activity Selection Problem	IFSC International Federation of Sports Climbing
s-GASP Simplified Group Activity	

Symbole

$|M|$ ist die Kardinalität einer Menge M .

2^M ist die Potenzmenge einer Menge M , d. h. $2^M := \{M' : M' \subseteq M\}$.

\mathbb{N} sind die natürlichen Zahlen $\{1, 2, \dots\}$, für die Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$ schreiben wir \mathbb{N}_0 .

\mathbb{R} sind die reellen Zahlen, die nicht negativen reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und die (echt) positiven reellen Zahlen mit $\mathbb{R}_{> 0}$.

\succsim ist eine (schwache) lineare Ordnung (eine totale und transitive binäre Relation).
Durch \sim wird der symmetrische Teil von \succsim gekennzeichnet und durch \succ wird je nach Kontext der asymmetrische Teil von \succsim gekennzeichnet oder eine strikt lineare Ordnung (eine totale, transitive und asymmetrische binäre Relation).




$\mathcal{L}(A)$ ist der Menge aller strikt linearen Ordnungen auf einer Menge A .

$\mathcal{W}(A)$ ist der Menge aller (schwachen) linearen Ordnungen auf einer Menge A .

Piktogramme

©DOSB/Sportdeutschland: , , ,  und .

©point-project.net: .

Eigenkreation:  (auf Grundlage von  ©©© und  ©Vecteezy.com).

Liste der akzeptierten Publikationen

1. Sebastian Schneckeburger, Britta Dorn, and Ulle Endriss. **The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation** [72]. *In Proceedings of the 16th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2017)*, IFAAMAS, May 2017.
2. Andreas Darmann, Janosch Döcker, Britta Dorn, Jérôme Lang, and Sebastian Schneckeburger. **On Simplified Group Activity Selection** [22]. *In Proceedings of the 5th International Conference on Algorithmic Decision Theory (ADT 2017)*.
3. Andreas Darmann, Janosch Döcker, Britta Dorn, Jérôme Lang, and Sebastian Schneckeburger. **Simplified Group Activity Selection** [23]. Accepted at the *Seventh International Workshop on Computational Social Choice (COMSOC 2018)*.
4. Janosch Döcker, Britta Dorn, Ulle Endriss, Ronald de Haan, and Sebastian Schneckeburger. **Tool Auctions** [25]. *In Proceedings of the 32nd AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI 2018)*.
5. Justin Kruger and Sebastian Schneckeburger. **Fall If It Lifts Your Teammate: A Novel Type of Candidate Manipulation** [54]. Accepted at the *Seventh International Workshop on Computational Social Choice (COMSOC 2018)*.

Anteile des Autors und der Mitautoren an den Publikationen

Die Beschreibung der Bedeutung der Eigenanteile gemäß §6 Absatz 2 Satz 3 der Promotionsordnung.¹

Projekt I - The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation: Aus diesem Projekt ging die Publikation Schneckenburger et al. [72] hervor.

Die grundlegende Fragestellung für das Projekt I geht auf vorherige Forschungsarbeiten von Ulle Endriss zurück. Die Anwendung des dezentralisierten Ansatzes auf Ungleichverteilungsmaße ist mir zuzuschreiben. Die einzelnen konkreten Fragestellungen wurden von Ulle Endriss, Britta Dorn und mir im Dialog entwickelt. Alle Theoreme und Beweise stammen aus meiner Feder. Der wissenschaftliche Schreibprozess war eine Gemeinschaftsarbeit aller drei Autoren, wobei mir eine Hauptrolle bei den technischen Anteilen zukam.

Projekt II - (On) Simplified Group Activity Selection: Aus diesem Projekt gingen die Publikationen Darmann et al. [22, 23] hervor.

Die grundlegende Fragestellung für das Projekt II kam von Andreas Darmann und Jérôme Lang. Die Theoreme und Beweise der grundlegenden Komplexitätsanalyse stammen im Wesentlichen von Andreas Darmann, Janosch Döcker und mir, wobei Andreas Darmann eine führende Rolle zukam. Die Erkenntnisse über das Spannungsverhältnis zwischen Effizienz und Fairness sowie die Abgrenzung der verschiedenen Lösungskonzepte wurden von mir erarbeitet. Die Resultate zu ausgewogenen Lösungen stammen von Janosch Döcker und mir. Der wissenschaftliche Schreibprozess war eine Gemeinschaftsarbeit aller fünf Autoren unter der Federführung von Britta Dorn und Andreas Darmann.

¹§6 Abs. 2 Satz 3 PromotionsO: Der Bewerber muss den Rahmen der gemeinschaftlichen Arbeit umreißen, die Namen der Mitarbeiter und deren Anteil an dem Gesamtprojekt angeben, die Bedeutung seiner eigenen Beiträge für die Gemeinschaftsarbeit darstellen.

Projekt III - Tool Auctions: Aus diesem Projekt ging die Publikation Döcker et al. [25] hervor.

Der Anstoß und die grundlegende Fragestellung für das Projekt III kamen von Ulle Endriss. Das Modell und die grundlegenden Konzepte wurden von Britta Dorn, Ulle Endriss und mir entwickelt. Die Theoreme und Beweise wurden hauptsächlich von Janosch Döcker, Ronald de Haan und mir erarbeitet, wobei Ronald de Haan die Hauptrolle zukam. Der wissenschaftliche Schreibprozess war eine Gemeinschaftsarbeit aller fünf Autoren unter der Federführung von Britta Dorn und Ulle Endriss.

Projekt IV - Fall If It Lifts Your Teammate: Aus diesem Projekt ging die Publikation Kruger und Schneckenburger [54] hervor.




Die grundlegende Fragestellung von Projekt IV – die Verbindung zwischen kombinierten Wettkämpfen und dem klassischen Wahlproblem der Sozialwahltheorie – wurde von beiden Autoren zusammen erarbeitet, ebenso die konkreten Einzelfragestellungen und entsprechenden Konzepte. Alle Expertise in klassischer Wahltheorie stammt von Justin Kruger, ebenso die praktische Arbeit für die Simulationen. Die Hintergrundrecherchen wurden von mir betrieben, die charakteristischen Beispiele von mir herausgearbeitet. Der wissenschaftliche Schreibprozess war eine Gemeinschaftsarbeit beider Autoren unter der Federführung von Justin Kruger.










Teil I.

Einleitung und Zielsetzung

1. Einleitung

Der Mensch ist ein soziales Wesen. Bis auf wenige extreme Ausnahmen ist er immer Teil eines Kollektivs. Bei einer Vielzahl von Problemen, auf die ein Mensch trifft, muss daher bei der Entscheidungsfindung die Präferenz von mehr als einem Individuum berücksichtigt werden. Das betrifft etwa die profane Frage, was eine Familie gemeinsam zu Abend isst, genauso wie die Frage, welche Parteien in der nächsten Legislaturperiode in einem Parlament sitzen. Beides sind Problemstellungen, die durch kollektive Entscheidungen gelöst werden. Es gibt eine Vielzahl von Präferenzen hinsichtlich möglicher Ergebnisse, die zu einer kollektiven Präferenz aggregiert werden müssen. Mit dieser Theorie der kollektiven Entscheidungen beschäftigt sich die *Sozialwahltheorie* (engl. *Social Choice Theory*); von Chevalyere et al. [19] wird dies folgendermaßen ausgedrückt: “Social Choice Theory is concerned with the design and analysis of methods for collective decision making.” Die in der Sozialwahltheorie betrachteten Probleme bezeichnet man auch als *Sozialwahlprobleme*. Im folgenden Abschnitt beginnen wir zur Einführung mit einem solchen Sozialwahlproblem.

Drei Geschwister, Alice, Bob und Carl, überlegen, wie sie ihren Nachmittag gestalten sollen. Die Optionen sind Slacklinien  oder Klettern .¹ Es gibt auch noch die Alternative Nichtstun  (symbolisiert durch das klassische Äquivalent dazu – Fernsehen). Alice und Carl würden am liebsten slacklines und am wenigsten gerne fernsehen. Bob wiederum würde am liebsten klettern und am wenigsten gerne slacklines. Ihre Präferenzen über die Aktivitäten lassen sich durch die drei strikt linearen Ordnungen $\{ \succ_A, \succ_B, \succ_C \}$ auf der Menge $\{ \text{Slackline}, \text{Klettern}, \text{Nichtstun} \}$ wie folgt ausdrücken:

Alice :  \succ_A  \succ_A  ,
 Bob :  \succ_B  \succ_B  ,
 Carl :  \succ_C  \succ_C  .

¹Das Slacklines ähnelt dem Seiltanz, man balanciert auf einem dynamischen Band. Beim Sportklettern steigt man durch ein Seil gesichert eine Wand hinauf – ein Sicherungspartner ist zwingend erforderlich.

1. Einleitung

Die Möglichkeit, dass alle machen, was ihnen am liebsten ist, besteht nicht, da man beim Klettern mindestens zu zweit sein muss. Was wäre nun eine gute Lösung und wie charakterisiert man solche Lösungen? Betrachten wir das Problem aus Sicht einer neutralen Zentralinstanz, der „Mutter“: Aus Sicht der Mutter ist es wichtig, dass möglichst viele (besser alle) Kinder eine echte Aktivität (also nicht Fernsehen) wählen und gleichzeitig kein Neid unter den Kindern aufkommt. Die Lösung, alle Kinder zum Slacklinen zu schicken, erscheint erst einmal gut, da alle Kinder mit einer echten Aktivität beschäftigt sind und außerdem niemand einen anderen um dessen Aktivität beneidet, sprich, die Aktivität mit einem anderen Kind tauschen will. Allerdings wäre diese Lösung nicht sehr „stabil“: Bevor Bob an der für ihn unliebsamen Aktivität Slacklinen teilnimmt, macht er lieber gar nichts und verbringt den Nachmittag vor dem Fernseher. Diese Lösung wiederum (Alice und Carl slacklinen, Bob sieht fern) erfüllt den klassischen Effizienzbegriff der Wirtschaftswissenschaften. Sie ist *Pareto-optimal*. Das heißt, es gibt keine andere Lösung, die mindestens ein Kind besser und dabei kein anderes schlechter stellt.

In diesem Einführungsbeispiel kommen bereits viele Aspekte von Sozialwahlproblemen zum Vorschein. Betrachten wir diese Aspekte von einer allgemeineren Warte. Die Grundfragestellung in der Sozialwahltheorie ist immer dieselbe: Eine Gruppe von Individuen will oder muss zu einer gemeinsamen (kollektiven) Entscheidung in Form einer *guten Lösung* über ein Problem bezüglich eines Objektes kommen; ein wesentlicher Aspekt des Problems sind die unterschiedlichen Präferenzen der Individuen gegenüber den Lösungen. Das Objekt selbst ist mit einer Menge von Alternativen verknüpft, wobei die Präferenzen der Individuen gegenüber den Lösungen sich direkt von gegebenen Präferenzen der Individuen über die Alternativen ableiten lassen.² Den Entscheidungsfindungsprozess können dabei eine Vielzahl von Herausforderungen behindern. Die Individuen können unterschiedliche Präferenzen bezüglich möglicher Ergebnisse haben, die insbesondere miteinander im Widerspruch stehen können. Der Raum der Lösungen kann durch externe Bedingungen eingeschränkt

²An folgenden zwei Beispielen kann man den Unterschied zwischen Objekt, Alternativen und Lösungen verdeutlichen. Beim mathematischen Kuchenteilen geht es um die Aufteilung eines kontinuierlichen (d. h. beliebig teilbaren) Gutes an eine Gruppe von Agenten (siehe Abschnitt 1.1.2). Hier ist das Objekt der Kuchen, die Lösungen sind alle Möglichkeiten den Kuchen unter den Individuen aufzuteilen und die Alternativen sind alle potentiell möglichen Kuchenstücke. Im Gegensatz dazu sind bei einer Präsidentschaftswahl Objekt, Menge der Lösungen und Menge der Alternativen ein- und dasselbe, nämlich die Menge der Kandidaten. Die Unterscheidung zwischen Präferenzen über Lösungen und Präferenzen über Alternativen wird meistens nicht explizit benannt, sie versteckt sich hinter Fragestellungen wie z. B. der nach neidfreiem Kuchenteilen.

sein. Der Entscheidungsprozess kann auch von einer externen Instanz übernommen werden, die dann für die Gruppe eine solche gute Lösung bestimmt. Falls der Entscheidungsprozess dezentral stattfindet, muss während des Prozesses ein Konsens oder zumindest ein Kompromiss hergestellt werden, obwohl nur lokale Information vorhanden ist und/oder die Kommunikationsmöglichkeiten insgesamt beschränkt sind. Die Individuen sollten dann mit dem Ergebnis der Entscheidung oder zumindest mit dem Verfahren, mit dem das Ergebnis zustande gekommen ist, einverstanden sein. Je nach Kontext können dabei auch spieltheoretische Überlegungen eine Rolle spielen. Assoziiert hiermit ist auch die Frage der Manipulierbarkeit. Individuen könnten versuchen, den Lösungsprozess zu ihren Gunsten zu manipulieren, etwa durch Angabe falscher Präferenzen.

1.1. Sozialwahltheorie




Die Sozialwahltheorie kann als Interaktion der Mathematik mit den Sozialwissenschaften verstanden werden. Die *Sozialwissenschaften* sind hierbei im Sinne der Definition des *Wirtschaftslexikons Gabler* [43] zu verstehen: „Der Terminus Sozialwissenschaften ist eine Sammelbezeichnung für all jene wissenschaftlichen Disziplinen, die sich mit den Phänomenen des gesellschaftlichen Zusammenlebens der Menschen auseinandersetzen. [...]“. Drei typische Gruppen von Sozialwahlproblemen sind Wahl-, Zuteilungs- und Zuordnungsprobleme. Diese drei Kategorien sind alle für diese Arbeit wichtig und werden deshalb im Folgenden genauer beschrieben.

1.1.1. Wahlprobleme

Bei Wahlproblemen geht es darum, mithilfe einer Aggregation von Präferenzen eine kollektive Entscheidung zu treffen. Inhalt und Notation sind im Folgenden dem Einführungskapitel aus Brandt et al. [11] entnommen. Die Präferenzen der Agenten $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$, in diesem Kontext Wähler genannt, sind dabei durch strikt lineare Ordnungen auf der Menge der Alternativen $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ gegeben. Jedem Wähler i ist also eine totale, transitive und asymmetrische binäre Relation \succ_i zugeordnet, die sogenannte Stimme. Falls Indifferenzen zwischen Alternativen zugelassen werden sollen, wird auf die Forderung der Asymmetrie verzichtet. Die Präferenzen werden in diesem Fall durch schwach lineare Ordnungen modelliert. Ein Präferenzprofil $\succ = \{\succ_1, \dots, \succ_n\}$

1. Einleitung

ist die Sammlung aller Stimmen. Die Menge aller strikt linearen Ordnungen auf A notieren wir mit $\mathcal{L}(A)$, die der schwachen linearen Ordnungen mit $\mathcal{W}(A)$. Ziel ist es nun, entweder aus der Menge der Alternativen einen oder mehrere Gewinner mittels eines Wahlsystems auszuwählen (wie z. B. bei einer Präsidentschaftswahl) oder die Alternativen gemäß einer aggregierten Präferenz anzuordnen (wie z. B. bei einem WG-Casting; hier ist es sinnvoll festzulegen, in welcher Reihenfolge den potentiellen neuen Mitbewohnern das freie Zimmer angeboten werden soll). Die Wahlsysteme beim ersten Szenario sind die sogenannten *Social-Choice-Funktionen* (SCF) (engl. *social choice functions*), dies sind Abbildungen der Form $F : \mathcal{L}(A)^n \rightarrow 2^A \setminus \{\emptyset\}$ (wobei F bevorzugt *resolut* sein sollte, d. h. nur ein $a \in A$ ausgewählt werden soll). Beim zweiten Szenario sind die Wahlsysteme die sogenannten *Social-Welfare-Funktionen* (SWF) (engl. *social welfare functions*), dies sind Abbildungen der Form $F : \mathcal{L}(A)^n \rightarrow \mathcal{W}(A)$; wir schreiben kurz \succ_F für $F(\{\succ_1, \dots, \succ_n\})$. Gibt es eine ungerade Anzahl an Wählern und nur zwei Alternativen, so ist die beste SCF (und SWF) leicht einsichtig: Bei der sogenannten *Majoritätswahl* wählt man von zwei Alternativen diejenige aus (bzw. ordnet ihn in der aggregierten Präferenz höher), welche von der Mehrzahl der Wähler präferiert wird.³ Auf den Fall, dass es drei oder mehr Alternativen gibt, lässt sich diese Wahlmethode jedoch nicht einfach verallgemeinern, wie das Condorcet-Paradoxon⁴ zeigt. Dies wird an folgender Variante des Nachmittagsproblems deutlich.

Beispiel 1. Diesmal haben Alice, Bob und Carl die Auswahl zwischen Klettern , Slacklinien  und Bouldern .⁵ Die Präferenzen der Kinder entsprechen den folgenden linearen Ordnungen:

Alice :  \succ_A  \succ_A  ,
 Bob :  \succ_B  \succ_B  ,
 Carl :  \succ_C  \succ_C  .

Fragt die Mutter nun die Kinder, ob sie lieber klettern oder bouldern wollen, so überstimmen Alice und Carl Bob und der Gewinner ist Klettern. Die anschließende Frage, ob sie nicht doch lieber slacklinien würden, bejahen Bob und Carl. Die Debatte scheint zugunsten von Slacklinien beendet, allerdings kommt der Vater zur Tür herein

³Warum die Majoritätswahl die „beste Wahlmethode“ ist, beweist das Theorem von May (May [58]). Man vergleiche hierzu den Artikel von Zwicker [77].

⁴In der Sozialwahltheorie versteht man unter einem Paradoxon, dass eine erwünschte Eigenschaft unter („überraschend“) schwachen Einschränkungen nicht erfüllt ist.

⁵Beim Bouldern klettert man ohne Seil in niedrigen Höhen über Fallschuttmatten.

und fragt in die Runde, ob die Kinder nicht lieber bouldern statt slacklines wollen. Die Zustimmung von Alice und Bob führt zur allgemeinen Verwirrung.

Nach dem von Condorcet vorgeschlagenen Wahlsystem (egal ob für SCF oder SWF) ordnet man von zwei Alternativen immer diejenige höher ein, welche im direkten Vergleich der zwei Alternativen von mehr Wählern bevorzugt wird. Diese Methode der paarweisen Majorität gerät hier an ihre Grenzen, da wir einen Zirkel von bevorzugten Alternativen (hier Aktivitäten genannt) erzeugt haben und die Condorcet-Methode also keinen klaren Sieger bzw. auch keine neue kollektive Präferenz in Form einer linearen Ordnung⁶ erzeugt hat. Aus dem Condorcet-Paradoxon können wir zwei wichtige Erkenntnisse gewinnen: Zunächst, dass auf den ersten Blick sinnvolle Ansätze nicht zu sinnvollen Resultaten führen müssen. Weiter, dass Relationen, die mithilfe der Methode der paarweisen Majorität aus einem Präferenzprofil gebildet werden, im Allgemeinen nicht transitiv sind. Kombinatorische Konstruktionen inspiriert durch das Condorcet-Paradoxon verwenden wir in allen Publikationen, bei denen die Präferenzen durch lineare Ordnungen gegeben sind. Dies sind: Darmann et al. [22, 23] und Kruger und Schneckenburger [54].

Dies führt zu der Frage nach der Existenz von „perfekten“ Methoden zur Aggregation von Präferenzen. Für SWF wird diese Frage mit dem Theorem von Arrow [5] negativ beantwortet. Unter der Annahme, dass die Agenten Präferenzen in Form strikt linearer Ordnungen über drei oder mehr Alternativen haben, besagt dieses Theorem, dass drei intuitiv sehr sinnvolle Eigenschaften für SWF nur von einem nicht erstrebenswerten Typ von SWF erfüllt werden können. Diese drei Eigenschaften sind:

1. *Universelle Domäne*: Alle \succ aus $\mathcal{L}(A)^n$ werden von der SWF F als Eingabe akzeptiert.
2. *Schwache Pareto-Eigenschaft*: Für je zwei Alternativen a, b soll gelten, falls $a \succ_i b$ für alle $i \in \mathcal{N}$, so gilt auch $a \succ_F b$.
3. *Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen*: Ob für zwei Alternativen a und b nun $a \succ_F b$ oder $b \succ_F a$ gilt, sollte nur von der relativen Einordnung der beiden Alternativen abhängen, nicht von der Einordnung einer dritten Alternative c .

Eine SWF, bei der das Ergebnis der Wahl nur von der Stimme eines Wählers abhängt,

⁶Die für ein gegebenes Präferenzprofil \succ durch die Condorcet-Methode induzierte Relation \succ ist zwar immer vollständig und reflexiv, aber im Allgemeinen nicht transitiv wie das Beispiel 1 zeigt; hier gilt $\text{K} > \text{S} > \text{L} > \text{K}$.

1. Einleitung

nennt man *Diktatur*. D. h. es gibt einen Wähler i , sodass $\succ_F = \succ_i$ gilt. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass eine Diktatur die drei Eigenschaften universelle Domäne, schwache Pareto-Eigenschaft und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt. Die verstörende Aussage von Arrows Theorem ist, dass nur Diktaturen diese drei Eigenschaften erfüllen.

Allgemein gilt Arrows Theorem als Geburtsstunde der modernen Sozialwahltheorie, wie es auch das *Handbook of Computational Social Choice* [11, 1.2.3] ausführt. Neben dieser grundsätzlichen Relevanz ist Arrows Arbeit auch methodisch für uns wichtig. In Arrows Arbeit wird die sogenannte axiomatische Methode herausgearbeitet, welche die mathematische Grundlage für die moderne Sozialwahltheorie bildet. Bei der axiomatischen Methode betrachtet man Fragestellungen der Sozialwahltheorie nicht anhand von konkreten Beispielen oder Lösungsmethoden. Stattdessen definiert man *Axiome*, d. h. mathematisch präzise Eigenschaften, für SWF (oder andere Funktionen im Sozialwahlkontext), wobei diese Axiome normativ aus philosophischen, sozialwissenschaftlichen und politikwissenschaftlichen Überlegungen motiviert sind. Der Begriff Axiom in der Sozialwahltheorie ist also insbesondere nicht deckungsgleich mit dem Begriff Axiom in der Mathematik. Die axiomatische Methode will dann Fragen des folgenden Typs beantworten: Welche der Axiome sind überhaupt gleichzeitig erfüllbar? Gibt es Kompromisse zwischen verschiedenen Axiomen? Gibt es eingeschränkte Fälle, in denen die Axiome doch gleichzeitig erfüllbar sind? Wie können vorhandene Funktionen anhand dieser Axiome charakterisiert werden?

In der Publikation *Fall If It Lifts Your Teammate* [54] beschäftigen wir uns mit einer Interpretation von modernen Sportwettkämpfen aus Sicht von SWF und postulieren und beweisen ein zu Arrows Theorem nahe verwandtes Theorem.

1.1.2. Zuteilungsprobleme: Gerechtes Teilen

Im Themengebiet *gerechtes Teilen* gibt es zwei Forschungsfelder. Man unterscheidet zwischen dem Aufteilen einer Menge unteilbarer Einzelgüter und dem Aufteilen eines einzelnen, jedoch beliebig aufteilbaren⁷ Gutes. Für das letztere Forschungsfeld hat sich die Bezeichnung *Kuchenteilen*⁸ etabliert, dieses Thema spielt für diese

⁷Hierbei ist aufteilbar im Sinne von *zerteilbar* gemeint.

⁸Einige Mathematiker der Lemberger Schule hatten sich in den 1940er-Jahren mit dem Thema Kuchenteilen aus Sicht der Maßtheorie beschäftigt, woraus unter anderem die Publikation *Sur la division pragmatique* von Steinhaus [75] entstand. Ihre *Kuchenteilenprotokolle* kann man auch als

Dissertation jedoch keine Rolle. Mit der Zuteilung unteilbarer Güter beschäftigt sich das Themengebiet *Multiagent Resource Allocation* (MARA). Die Güter sind unteilbar in zweierlei Sinn: Sie lassen sich nicht in kleinere Einheiten zerlegen und sie lassen sich nicht von mehreren Agenten gleichzeitig benutzen.⁹ Dabei werden die möglichen Allokationen anhand der individuellen Präferenzen der Agenten über die Güter, beziehungsweise über die mögliche Kombinationen von Gütern, bewertet. Die Präferenzen in MARA sind häufig anhand von *Nutzenfunktionen* gegeben. Durch eine Nutzenfunktion wird einer Menge von Gütern ein numerischer Wert, der „Nutzen“, zugeordnet.

Die Ausführungen in diesem Absatz sind inhaltlich der Publikation *Issues in Multiagent Resource Allocation* von Chevaleyre et al. [18] entnommen. Mit dem abstrakten Problem MARA lassen sich eine Vielzahl von Fragestellungen behandeln. Darunter fallen zum einen Systeme mit gewinnorientierten Agenten, wobei die Agenten sich auf eine Verteilung des Gesamtgewinns einigen müssen. Zum anderen lassen sich auch verteilte Systeme problemlösender Agenten modellieren, wobei diese den Zugriff auf gemeinsam genutzte Rechnerleistung verwalten müssen. Für den Ausdruck *Multiagent* in MARA gibt es zwei Interpretationen, die mit den beiden obigen Beispielen zusammenfallen. Nach der ersten Interpretation kann sich *Multiagent* darauf beziehen, dass die Allokationen durch ein Zusammenwirken von verschiedenen Agenten bestimmt werden. Nach der zweiten Interpretation kann sich *Multiagent* auf die Tatsache beziehen, dass die Auswahl der Allokation von den Präferenzen mehrerer Agenten abhängt, anstatt von der Präferenz einer (einzelnen) Entität. Anwendungen für MARA in der Industrie sind automatisiertes Beschaffungsmanagement und Fertigungskontrolle, Grid-Computing und die gemeinsame Nutzung von Satelliten. In MARA stellen sich die folgenden Fragen:

- Was sind gute Kriterien für die Güte von Allokationen?
- Welche formalen Sprachen sind geeignet, um die Präferenzen der Agenten zu modellieren?
- Was sind geeignete Allokationsprotokolle, und mit welchen Schwierigkeiten haben diese zu kämpfen?

die Verwendung von algorithmischen Methoden verstehen. Kuchenteilen ist hierbei eine Versinnbildlichung für die Aufteilung eines kontinuierlichen, d. h. beliebig teilbaren, Gutes. Eine gute Übersicht über das Thema findet sich im Artikel von Procaccia [65].

⁹Auf Englisch lässt sich das kurz und elegant als *indivisible and non shareable items* ausdrücken.

1. Einleitung

In der Publikation *The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation* [72] beschäftigen wir uns mit einem Kriterium, das die Ungleichheit zwischen den Agenten misst: dem *Atkinson Inequality Index* (kurz *Atkinson-Index*). Der Fokus der Publikation liegt darauf, wie gute Allokationen im Sinne des Atkinson-Index durch dezentralisierte Prozesse gefunden werden und welche Schwierigkeiten bei diesem Ansatz auftreten können. Dementsprechend sind hier beide Interpretationen des Ausdruckes *Multiagent* in MARA gültig.

Bei einem *zentralisierten* Allokationsprozess wird die optimale Zuordnung von einer Zentralinstanz berechnet (dieser Zentralinstanz müssen die Agenten dann im Voraus ihre Präferenzen mitgeteilt haben). Werden Allokationen gesucht, welche die Gesamtsumme der Nutzen (der einzelnen Agenten) maximieren, dann entspricht diese Fragestellung der einer *kombinatorischen Auktion* (engl. *combinatorial auction*). Bei einer kombinatorischen Auktion geben *Bieter* Gebote auf Kombinationen von Gütern ab und der *Auktionator* muss entscheiden, welche der Gebote er unter dem Gesichtspunkt der Gewinnmaximierung annimmt. Die Abgrenzung zu MARA ist genau anhand der zwei Interpretationen des Ausdrucks *Multiagent* zu ziehen. Viele Ergebnisse und Methoden aus dem Gebiet der kombinatorischen Auktionen sind auch wichtig für MARA. Dies betrifft z. B. die Analyse der zugrunde liegenden Komplexität der jeweiligen Fragestellungen. Wie „*schwierig*“ ist es, gute Allokationen zu finden? Dies führen wir in Abschnitt 1.2 und Appendix A.1 weiter aus. Eine weitere gemeinsame Frage ist die nach geeigneten formalen Sprachen zur Kodierung der Gebote. Hier werden geeignete Kompromisse zwischen Expressivität und Kompaktheit gesucht, d. h. es soll möglichst viel mit möglichst wenig Speicherplatz ausgedrückt werden. Man vergleiche hierzu die Arbeiten von Nisan [63] und Endriss [31].

In der Publikation *Tool Auctions* [25] untersuchen wir eine Variante von kombinatorischen Auktionen namens *Mixed Multiunit Combinatorial Auction* (MMUCA). Hier geben die Agenten Gebote auf Transformationen von Gütermengen¹⁰ ab. In unserem Modell untersuchen wir Transformationen, die durch die Existenz von Gütern charakterisiert werden, die durch die jeweilige Transformation nicht verbraucht werden. Von Interesse sind die Kombinationen von Transformationen, die den Gesamtnutzen des Auktionators maximieren. Wir legen eine profunde (parametrisierte) Komplexitätsanalyse dieses Modells vor.

¹⁰Durch eine Transformation wird eine Menge von Gütern in eine andere umgewandelt.

1.1.3. Zuordnungsprobleme: Matching und Koalitionsbildung

Zuordnungsprobleme fallen in zwei (nicht strikt getrennte) Kategorien. Bei Matchingproblemen geht es darum, verschiedene Agenten einander zuzuordnen. Hier haben die Agenten also Präferenzen übereinander. Haben die Agenten Präferenzen darüber, in welchen Koalitionen (Teilmengen der Agentenmenge) sie enthalten sein wollen – hier geht es also um Partitionierungen der Agentenmenge –, haben wir es mit einem *Koalitionsbildungsproblem* (engl. *Hedonic Game*) zu tun.

Das klassische zweiseitige Matchingproblem ist das sogenannte *Stable Marriage Problem* (Gale und Shapley [44]). Die Menge der Agenten ist zweigeteilt in zwei Populationen A und B mit $|A| \leq |B|$. Jeder Agent $a \in A$ ist mit einer Präferenzliste $\succ_a \in \mathcal{L}(B)$ ausgestattet und jeder Agent $b \in B$ mit einer Präferenzliste $\succ_b \in \mathcal{L}(A)$. Die gesuchte Lösung ist ein sogenanntes *Matching*, für das Stable Marriage Problem sind dies bijektive Abbildungen $\pi: A \rightarrow B$.¹¹ In der Publikation *College admissions and the stability of marriage* von Gale und Shapley [44] wird der Begriff *stabil* (engl. *stable*) als Gütekriterium für zweiseitige Matchingprobleme eingeführt. Ein Matching π ist *instabil*, falls es ein Paar a und b mit a aus A und b aus B gibt, die nicht einander zugeordnet sind (d. h. es gilt $\pi(a) \neq b$), aber jeweils den anderen Teil des Paares gegenüber dem zugeordneten Agenten unter π präferieren (d. h. $b \succ_a \pi(a)$ und $a \succ_b \pi^{-1}(b)$). Ein nicht instabiles Matching heißt dann stabil.

Von *Hedonic Games* spricht man, wenn wir es mit Sozialwahlproblemen zu tun haben, bei denen jeder Agent i aus der Agentenmenge \mathcal{N} Präferenzen über die Menge aller für ihn theoretisch möglichen Koalitionen $\mathcal{N}_i := \{S \subseteq \mathcal{N} \mid i \in S\}$ hat. Die hier gesuchten Lösungen sind *Koalitionsstrukturen* (engl. *coalition structures*). Eine Koalitionsstruktur π ist eine Partition der Agentenmenge (in sogenannte Koalitionen). Das zentrale Lösungskonzept hier ist die *core stability*. Eine Koalitionsstruktur π ist nicht *core stable*, falls es eine Koalition $S \subseteq \mathcal{N}$ gibt, sodass alle Agenten aus S diese Koalition ihrer gegenwärtigen Koalition gegenüber bevorzugen.

Unser Einführungsbeispiel für ein Sozialwahlproblem, das *Nachmittagsproblem*, ist ein Beispiel für eine spezielle Art eines Zuordnungsproblems. Wir haben hier ein Matchingproblem (Kinder zu Aktivitäten) und ein Koalitionsbildungsproblem (die Kinder

¹¹In allgemeineren Matchingproblemen entspricht der Begriff Matching dann dem Begriff aus der Graphentheorie. Wir haben hier nicht die klassische Darstellung des *Stable Marriage Problems* gewählt (man vergleiche z. B. den Artikel von Klaus et al. [51]), sondern eine, die den direkten Vergleich zum *Simplified Group Activity Selection Problem* (s-GASP) (siehe Kapitel 4) erleichtert.

1. Einleitung

einer Aktivität bilden eine Koalition), wobei das Matchingproblem kein direktes Teilproblem des Koalitionsbildungsproblems ist. Diesen Typ Zuordnungsproblem bezeichnen wir als *Simplified Group Activity Selection Problem* (s-GASP). Das entsprechende Modell untersuchen wir in den Publikationen *On Simplified Group Activity Selection* [22] und *Simplified Group Activity Selection* [23].

1.1.4. Kriterien guter Lösungen

Ob wir nun vor einem Wahl-, Zuteilungs- oder Zuordnungsproblem stehen, die Aufgabe ist es immer, *gute* Lösungen zu erhalten. Was nun eine *gute* Lösung charakterisiert, wird axiomatisch festgelegt und hängt vom jeweiligen Kontext ab. Kriterien für gute Lösungen sind also eine Variante von Axiomen. Im Wesentlichen lassen sich drei Kategorien für Lösungen identifizieren, wobei diese nicht strikt voneinander getrennt sein müssen: Fairness-, Effizienz- und Stabilitätskriterien.

Fairnesskriterien sollen einen Gerechtigkeitsaspekt abbilden. Bei *Zuteilungsproblemen* gibt es z. B. das Kriterium der Neidfreiheit. Eine Zuteilung ist neidfrei, wenn niemand seinen Anteil gegen den eines anderen eintauschen wollen würde. Bei Wahlproblemen garantieren Fairnesskriterien die Gleichbehandlung der Akteure beispielsweise in dem Sinne, dass der *Name* bzw. die *Indexnummer* eines Wählers (Anonymität) oder Kandidaten (Neutralität) keine Rolle spielen soll.

Effizienzkriterien können von qualitativer oder quantitativer Art sein. Ein qualitatives Effizienzkriterium wäre z. B. die Pareto-Optimalität. Eine Lösung ist Pareto-optimal, falls es keine andere Lösung gibt, die niemanden schlechter, aber mindestens ein Individuum besser stellt. Bei quantitativen Kriterien sollen vorgegebene Zielfunktionen, wie z. B. die utilitaristische soziale Wohlfahrt¹², optimiert werden.

Stabilitätskriterien tauchen hauptsächlich bei Zuordnungsproblemen auf und sind aus der Spieltheorie motiviert. Die Idee hierbei ist, ein Sozialwahlproblem als Spiel aufzufassen, das immer wieder in derselben Konstellation von Objekt und Individuen (in diesem Zusammenhang meist Spieler genannt) gespielt wird. Eine Lösung heißt dann stabil, wenn kein Spieler (oder gegebenenfalls keine Gruppe von Spielern) die Möglichkeit hat, durch eine einseitige Änderung in der nächsten Runde das Ergebnis in seinem (ihrem) Sinne zu verändern.

¹²Die utilitaristische soziale Wohlfahrt ist die Summe der Einzelnutzen.

1.2. Computational Social Choice

Mit Fragen der Sozialwahltheorie, also mit Problemen der kollektiven Entscheidungsfindung, haben sich Wissenschaftler und Philosophen in gewisser Weise schon immer beschäftigt. Die Betrachtung von Fragen der Sozialwahltheorie aus Sicht der modernen Mathematik und speziell der theoretischen Informatik brachte neue Impulse und führte zu einem neuen Forschungsfeld, für das sich der Name *Computational Social Choice* (ComSoC) etabliert hat. Der Begriff wurde für den 1st International Workshop on Computational Social Choice in Amsterdam (2006) wie folgt beschrieben:

“Computational social choice is a new discipline emerging at the interface of social choice theory and computer science. It is concerned with the application of computational techniques to the study of social choice mechanisms, and with the integration of social choice paradigms into computing.”

— Endriss und Lang (2006) [32]

Die Integration von Paradigmen der Sozialwahltheorie in die Informatik, auf die Endriss und Lang hinweisen, ergibt sich dann, wenn Konzepte aus der Sozialwahltheorie Anwendung auf Lösungskonzepte der Informatik finden, was zur Lösung von Problemen beitragen kann.¹³ Für das vorliegende Werk hat diese Forschungsrichtung keine Relevanz. Die genannte Anwendung der Methoden aus der Informatik auf die Sozialwahltheorie manifestiert sich im Wesentlichen in Fragestellungen der Algorithmik und Komplexitätstheorie. Die dabei auftretenden Ausdrücke *schwer* und *effizient* beziehen sich auf Begriffe der Komplexitätstheorie. Hintergründe und Begriffe werden im Appendix A.1 insoweit erläutert, als sie für die vorliegende Arbeit relevant sind.

Während sich die Sozialwahltheorie vor allem mit der Charakterisierung und Existenz guter Lösungen beschäftigt, steht in ComSoC die Komplexität der Lösungsfindung und die Konstruktion effizienter Lösungsmechanismen im Vordergrund, sowohl allgemein wie auch für eingeschränkte Sozialwahlprobleme. Sind Manipulationen theoretisch möglich, so wird in ComSoC untersucht, wie schwierig diese Manipulationen im komplexitätstheoretischen Sinne sind. Die Motivation dahinter ist, dass Manipulationen, für die NP-schwere Probleme gelöst werden müssen, als in der Praxis nicht effizient durchführbar angesehen werden können.

¹³Etwa indem Erkenntnisse über Wahlsysteme in die Entwicklung von Ranking-Algorithmen einfließen (Dwork et al. [29]) oder gerechte Zuteilungsverfahren für Netzwerkdesign (engl. *network design*) verwendet werden (Anshelevich et al. [4]). Diese und weitere Beispiele finden sich im Buch von Rothe et al. [68, 4.3]. Ausführlicher auf dieses Thema gehen Brandt et al. [10, 1.3] ein, die insbesondere die Verbindungen zum Forschungsfeld der künstlichen Intelligenz aufzeigen.

2. Zielsetzung

Die allgemeine Zielsetzung dieses Promotionsprojekts war es, ComSoC im Bereich der Zuordnungs- und Zuteilungsprobleme zu betreiben. Der Fokus dabei war, die in der Informatik und Mathematik entwickelten Methoden auf entsprechende Sozialwahlprobleme anzuwenden. Das hieß in unseren Projekten, das jeweilige Problem mithilfe mathematischer Methoden zu formalisieren, mithilfe von Logik und Kombinatorik zu analysieren und dann mit Methoden der Algorithmik und Komplexitätstheorie zu untersuchen. Wir führen im Folgenden die spezifischen Zielsetzungen für die einzelnen Projekte gesondert auf.

Projekt I - The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation:

Das Ziel in diesem Projekt war, für MARA das Kriterium der Ungleichverteilungsmaße aus den Wirtschaftswissenschaften zu analysieren. Der Fokus lag auf der Kompatibilität mit einem dezentralisierten Ansatz. In diesem Sinne sollten das zugrunde liegende Entscheidungsproblem komplexitätstheoretisch analysiert und die Grenzen und Möglichkeiten des dezentralisierten Ansatzes herausgearbeitet werden. (Aus diesem Projekt ging die Publikation Schneckenburger et al. [72] hervor.)

Projekt II - (On) Simplified Group Activity Selection:

Wir wollten eine vereinfachte Variante des bereits untersuchten *Group Activity Selection Problem* (GASP) einführen, das als Modell für eine Vielzahl von aus der Praxis motivierten Szenarien dienen kann. Weiter wollten wir verschiedene bekannte Lösungskonzepte auf dieses Modell anwenden und die Zusammenhänge und Unterschiede dieser Lösungskonzepte ausarbeiten. Die auftretenden Entscheidungsprobleme sollten einer ausführlichen komplexitätstheoretischen Analyse unterzogen werden. (Aus diesem Projekt gingen die Publikationen Darmann et al. [22, 23] hervor.)

2. Zielsetzung

Projekt III - Tool Auctions: Für das Modell *Mixed Multiunit Combinatorial Auction* (MMUCA) wollten wir eine Klasse eingeschränkter Spezialfälle einführen, die sowohl auf viele Anwendungen in der Praxis anwendbar sind als auch die Identifizierung einfacherer Spezialfälle ermöglichen. Der Fokus lag dementsprechend auf der Bestimmung geeigneter Designwahlen und einer anschließenden ausführlichen komplexitätstheoretischen Analyse des Modells. (Aus diesem Projekt ging die Publikation Döcker et al. [25] hervor.)

Projekt IV - Fall If It Lifts Your Teammate: Ziel war es, kombinierte (Sport-)Wettkämpfe¹ aus Sicht der Sozialwahltheorie zu analysieren. Inspiriert von Arrows Theorem (Arrow [5]) wollten wir die Grenzen und Möglichkeiten dieses Modells anhand der axiomatischen Methode bestimmen. Darüber hinaus wollten wir einen konkreten Wettkampf² in diesem Sinne analysieren, die relativen Häufigkeiten von problematischen Instanzen anhand von Simulationen abschätzen und darüber hinaus alternative Verfahren mit besseren theoretischen Eigenschaften bestimmen. (Aus diesem Projekt ging die Publikation Kruger und Schneckenburger [54] hervor.)

¹Unter einem kombinierten Wettkampf verstehen wir ein Wettkampfformat, bei dem Ranglisten einzelner Sportdisziplinen zur Generierung einer Gesamtrangliste verwendet werden.

²Der von der *International Federation of Sports Climbing* (IFSC) eingeführte Wettbewerb für Sportklettern bei Olympia, das *Combined Olympic Format* (siehe IFSC [49]), diente uns als Inspiration für das Projekt.

Teil II.

Ergebnisse und Diskussion

Die fünf Publikationen werden in den vier Kapiteln 3, 4, 5 und 6 diskutiert.

Wir beginnen mit der Publikation **The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation** [72] in Kapitel 3. Hier erläutern wir Ungleichheit im Kontext von *Multiagent Resource Allocation*, einen dezentralisierten Ansatz zur Findung optimaler Lösungen, und skizzieren entscheidende Punkte unserer Beweistechniken.

Das Kapitel 4 behandelt das Thema *Simplified Group Activity Selection Problem* und diskutiert die zwei Publikationen **On Simplified Group Activity Selection** [22] und **Simplified Group Activity Selection** [23]. Wir führen eine einfache Variante des *Group Activity Selection Problem* ein und definieren und erläutern diverse Lösungskonzepte. Wir geben eine Übersicht über die Methoden und Ergebnisse unserer Komplexitätsanalyse des Modells.

Im Kapitel 5 diskutieren wir das Thema *Mixed Multiunit Combinatorial Auction* (MMUCA) und die Publikation **Tool Auctions** [25]. Wir führen eine neue Variante des Modells MMUCA ein, das einfachere zu behandelnde Spezialfälle mit praktischer Relevanz aufzeigt. Wir erläutern unsere Designwahlen und die Ergebnisse einer (parametrisierten) Komplexitätsanalyse.

Das letzte Kapitel 6 behandelt eine neue Interpretation des klassischen Wahlproblems der Sozialwahltheorie (eingeführt von Arrow [5]). Hier wird die Publikation **Fall If It Lifts Your Teammate: a Novel Type of Candidate Manipulation** [54] diskutiert. Motiviert durch den Wettkampfmodus des olympischen Sportkletterwettkampfes *Combined Olympic Format* (COF) führen wir kombinierte Wettkämpfe als Aggregationsproblem von Präferenzen (in der Form von strikt linearen Präferenzen) ein. Wir analysieren die konkreten Eigenschaften des *Combined Olympic Format* (COF) und beleuchten für kombinierte Wettkämpfe im Allgemeinen die theoretischen Grenzen und Möglichkeiten bezüglich der Immunität gegen Manipulierbarkeit, insbesondere im Vergleich mit dem Unmöglichkeitstheorem von Arrow.

3. The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation

Das Themengebiet Multiagent Resource Allocation (MARA) befasst sich mit der Allokation von Gütern unter einer Gruppe von Agenten, wobei die Agenten Präferenzen über die Allokationen haben. Jeder Agent assoziiert mit jeder Allokation den Nutzen, welchen für ihn die Teilmenge von Gütern hat, die er unter dieser Allokation zugeordnet bekommt. Wir sind an der Minimierung von Ungleichheit interessiert, d. h. an Allokationen, bei denen die Nutzen der einzelnen Agenten gleich, oder zumindest „möglichst gleich“ sind. Dieses „möglichst gleich“ messen wir anhand eines Ungleichverteilungsmaßes, hierauf gehen wir später genauer ein. Das Problem, für MARA-Szenarien eine Allokation mit gleichem Nutzen für alle Agenten zu finden, stellt sich schon unter sehr starken Einschränkungen als NP-vollständiges Entscheidungsproblem heraus.¹ Diese Komplexität überträgt sich auch auf die Minimierung von Ungleichheit. Um mit dieser Grundschwierigkeit umzugehen, untersuchen wir einen *dezentralisierten Ansatz* (engl. *distributed approach*): Hier werden die Aufgaben, die mit der Bestimmung guter Allokationen verbunden sind, nicht von einer Zentralinstanz geschultert, sondern durch die Agenten in einem dezentralisierten „Handelsprozess“. Für ein zu optimierendes Kriterium (in unserem Fall die Ungleichheit) wird hierbei ausgehend von einer beliebigen Startallokation durch eine Folge von Allokationen eine schrittweise Optimierung durchgeführt, wobei die einzelnen Schritte durch das Handeln von Gütern *lokal* zwischen den Agenten ausgeführt werden. *Lokal* bedeutet, dass nur Informationen von an diesem Schritt beteiligten Agenten eine Rolle spielen. Optimalerweise sind an diesen einzelnen Schritten nur wenige Agenten beteiligt.

Die Grundfrage der Publikation Schneckenburger et al. [72] lässt sich in folgendem Satz zusammenfassen: Ist es möglich, für MARA-Szenarien Verteilungen von Gü-

¹Das NP-vollständige Problem PARTITION (A.1.1: Problem 2) lässt sich auf MARA-Szenarien mit nur zwei Agenten und identischen additiven Nutzenfunktionen reduzieren, siehe Abschnitt 3.2.1.

3. *The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation*

tern mit minimaler Ungleichheit anhand eines dezentralisierten Prozesses zu finden? Ungleichheit ist eine *globale* Eigenschaft, da zur Beurteilung der Ungleichheit Informationen von allen Agenten benötigt werden. So betrachtet stellt sich die Grundfrage folgendermaßen: Kann man Protokolle generieren, in welchen die Agenten mithilfe lokaler Informationen agieren und dennoch gleichzeitig die globale Eigenschaft der Ungleichheit minimieren?

Der hervorzuhebende wissenschaftliche Beitrag in der Publikation *The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation* [72] sind die darin verwendeten Beweistechniken. In diesem Kapitel verfolgen wir dementsprechend zwei Ziele: Wir wollen zum einen die Hintergründe und die Bedeutung der Ergebnisse aufzeigen, zum anderen die Beweistechniken strukturiert aufbereiten. Insbesondere wollen wir bei der Einführung der Beweistechniken die zugrunde liegenden mathematischen Konzepte herausarbeiten.

Diese zwei Ziele spiegeln sich auch in der Struktur dieses Kapitels. In Abschnitt 3.1 erläutern wir Fairnesskriterien im Kontext von MARA informell. Die präzise Einführung des Modells MARA erfolgt in Abschnitt 3.2, hier werden auch die Fairnesskriterien formalisiert. In Unterabschnitt 3.2.1 gehen wir auf die Komplexität des zugrunde liegenden Entscheidungsproblems ein, gefolgt von einer Hintergrundbetrachtung des dezentralisierten Ansatzes in Unterabschnitt 3.2.2. Die in der Publikation enthaltenen Ergebnisse werden in Abschnitt 3.3 diskutiert, wobei wir die verwendeten Beweistechniken ausführlich beleuchten. Das Kapitel wird mit einem Fazit und Ausblick in Abschnitt 3.4 abgeschlossen.

Der Abschnitt 3.1 ist inhaltlich der Publikation entnommen, ebenso große Teile von Abschnitt 3.2. Neues Gedankengut findet sich in den Hintergrundbetrachtungen zur Komplexität und dem dezentralisierten Ansatz. Dies betrifft in besonderem Maß das Metatheorem über Konvergenz sowie die entsprechende Hinführung. Der Abschnitt 3.3 (*Ergebnisse*) hat naturgemäß eine große Schnittmenge mit dem Ergebnisteil der Publikation. In der hier vorliegenden Diskussion und Erläuterung gehen wir aber ausführlicher auf die Korrespondenz zwischen Kriterien für Deals und Allokationen ein. Neu ist in diesem Abschnitt insbesondere die vereinheitlichte systematische Betrachtungsweise der Beweistechniken. Abschnitt 3.4 orientiert sich am Abschnitt 5 (*Conclusion*) der Publikation, ergänzt um den Ausblick auf die geplante Veröffentlichung eines Artikels in einer Fachzeitschrift.

3.1. Fairness in MARA

Bevor wir den dezentralisierten Ansatz weiter ausführen, betrachten wir die Hintergründe von Fairness und Ungleichheit in MARA. Rekapitulieren wir die Grundfrage bezüglich Fairness in MARA: Gibt es eine Zuordnung der gegebenen Güter zu den vorhandenen Agenten, die fair in einem vorher festgelegten Sinne ist? (Dabei gehen wir von endlichen Güter- und Agentenmengen aus.) Das entsprechende Fairnesskriterium ist dann jeweils anhand von Präferenzen der Agenten über die Teilmengen der Gütermenge definiert. Der Fokus der ComSoC-Forschung liegt zum einen auf qualitativen Kriterien wie der Neidfreiheit und der Pareto-Optimalität, zum anderen auf quantitativen Effizienzkriterien. Letztere sind unter dem Begriff *soziale Wohlfahrten* bekannt. Wichtige Vertreter sind die utilitaristische soziale Wohlfahrt (die mathematisch einfach der Summe aller Einzelnutzen entspricht) und die soziale Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt (die dem Produkt der Einzelnutzen entspricht). Während die utilitaristische soziale Wohlfahrt nur das Maximieren des Gesamtnutzens im Blick hat, ist die soziale Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt auch in der Lage, Ungleichheiten zwischen den Agenten abzubilden.² In ComSoC wenig Beachtung gefunden haben Kriterien, deren expliziter Fokus auf der Ungleichheit von Allokationen liegt. Eine Ausnahme hiervon sind die Publikationen von Endriss [31] und Lesca und Perny [56]. Dies steht im Gegensatz zu dem großen Interesse, das diesem Thema in den Sozialwissenschaften entgegengebracht wird.

Es gibt keine einheitliche Methode, um Ungleichheit zu messen. Die wichtigsten Werkzeuge der Sozialwissenschaften sind die Ungleichverteilungsmaße, die zur Analyse von Einkommensverteilungen benutzt werden. Übertragen auf MARA ist ein Ungleichverteilungsmaß eine Abbildung von Allokationen auf das reelle Intervall $[0, 1]$. Hierbei steht die 0 für vollkommene Gleichheit (was bedeutet, dass alle Agenten denselben Nutzen unter der Allokation erhalten), Werte nahe oder gleich 1 stehen hingegen für ein hohes bzw. maximales Maß an Ungleichheit zwischen den Agenten, man vergleiche hierzu die Arbeit von Endriss [31]. Wir fokussieren uns für die Analyse des dezentralisierten Ansatzes auf ein bestimmtes Ungleichverteilungsmaß, nämlich den Atkinson-Index, der auf der sozialen Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt basiert.

²Betrachten wir als Beispiel ein Szenario mit zwei Agenten. In einer Allokation habe der erste Agent den Nutzen 1, der zweite den Nutzen 7. Vergleichen wir dies mit einer Allokation, in der beide den Nutzen 4 haben. Die utilitaristische soziale Wohlfahrt der beiden Allokationen ist identisch ($1 + 7 = 4 + 4$), aber das Nash-Produkt für die zweite (offensichtlich gerechtere) Allokation ist höher als das der ersten Allokation ($1 \cdot 7 < 4 \cdot 4$).

3.2. Das Modell MARA

Ein Instanz in Multiagent Resource Allocation (MARA) wird als *Szenario* bezeichnet und durch ein Tupel $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ beschrieben. Dabei ist $\mathcal{N} := \{1, \dots, n\}$ die (endliche) Agentenmenge und \mathcal{G} die endliche Gütermenge mit $|\mathcal{G}| = m$. Die gesuchten Lösungen sind *Allokationen*, d. h. Abbildungen $A: \mathcal{N} \rightarrow 2^{\mathcal{G}}$ mit $A(i) \cap A(j) = \emptyset$ für $i \neq j$. Eine Allokation ordnet jedem Agenten eine Teilmenge der Güter zu, die in diesem Kontext *Bündel* genannt werden. Wir betrachten nur vollständige Allokationen, d. h., wir nehmen immer an, dass $\bigcup_{i \in \mathcal{N}} A(i) = \mathcal{G}$ gilt. Man kann A als eine geordnete Partition von \mathcal{G} interpretieren. Die Präferenzen der Agenten sind gegeben durch *Nutzenfunktionen* (engl. *utility functions*) $\mathcal{U} = \{u_i: i \in \mathcal{N}\}$, d. h. für jeden Agenten i gibt es eine Funktion $u_i: 2^{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass $u_i(B)$ der Wert des Bündels B für Agent i ist. Der Nutzen einer Allokation für einen Agenten entspricht dem Nutzen des Bündels, das er unter dieser Allokation erhält. Wir vereinfachen hier die Notation: $u_i(A) = u_i(A(i))$. Allokationen, bei denen alle Agenten denselben Nutzen erhalten, nennen wir *egalitär*. Jede Allokation induziert einen *Nutzenvektor* (engl. *utility vector*) $\mathbf{u}(A) = (u_i(A))_{i \in \mathcal{N}}$. Das arithmetische Mittel eines Nutzenvektors ($\frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)$) bezeichnen wir mit $\mu(A)$. Wir vergleichen und bewerten die Allokationen anhand der entsprechenden induzierten Nutzenvektoren. Die sozialen Wohlfahrten sind Funktionen $sw: \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Optimal für das Kriterium der utilitaristischen sozialen Wohlfahrt sind die Allokationen A , die die Funktion sw_{util} mit $sw_{util}(\mathbf{u}(A)) = \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)$ maximieren. Ebenso ist es mit der sozialen Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt und der Funktion sw_{nash} mit $sw_{nash}(\mathbf{u}(A)) = \prod_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)$. Im Gegensatz zur utilitaristischen sozialen Wohlfahrt ist die soziale Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt kein reines Effizienzkriterium und besitzt auch eine Fairnesskomponente. Ein Beispiel zu diesem Aspekt und zu den Notationen und Begriffen findet sich im Appendix A.2.1 (Beispiel 13).

Effizienz wird anhand von kollektiven Nutzenfunktionen gemessen, Ungleichheit anhand von Ungleichverteilungsmaßen (engl. *inequality indices*). Wir konzentrieren uns hier auf den wichtigsten Vertreter aus der Familie der sogenannten Atkinson-Indizes, den Atkinson-Index \mathcal{I} basierend auf der sozialen Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt sw_{nash} . Dieser ist definiert als

$$\mathcal{I}(A) = 1 - \frac{\sqrt[n]{sw_{nash}(A)}}{\mu(A)} = 1 - \frac{\sqrt[n]{\prod_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)}}{\frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)},$$

mit $\mathcal{I}(A) = 0$, falls alle Nutzen 0 sind. Offensichtlich bildet \mathcal{I} auf das Intervall $[0, 1]$ ab.

Nach Atkinson [7] kann man diesem Maß folgende intuitive Bedeutung zuordnen. Wenn \mathcal{I} den Wert p annimmt, so könnte man mit einer egalitären Verteilung von $1 - p$ des Gesamtnutzens dieselbe soziale Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt generieren. Andere Ungleichverteilungsmaße, speziell der sogenannte Gini-Index, werden zwar häufiger angewendet, der Atkinson-Index wird jedoch von vielen Autoren (Atkinson [7], Sen [73], Allison [2] und Moulin [61]) als das unter normativen Gesichtspunkten zu bevorzugende Ungleichverteilungsmaß angesehen. Weitere Hintergründe finden sich im Appendix A.2.3. Wir verwenden im Folgenden die Bezeichnung Atkinson-Index nur noch für den speziellen Index \mathcal{I} .

Der Atkinson-Index nimmt für egalitäre Allokationen den Wert 0 an; des Weiteren nimmt er in allen anderen Fällen einen Wert ungleich 0 an. Dies zeigt das folgende Lemma, welches direkt anhand der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel gezeigt werden kann.

Lemma 1 (Lemma 1 [72]). *Falls für eine Allokation A gilt, dass $\mathcal{I}(A) = 0$, dann erhalten alle Agenten denselben Nutzen, d. h.,*

$$\mathcal{I}(A) = 0 \implies \forall i \in \mathcal{N} : u_i(A) = \mu(A).$$

3.2.1. Computational Complexity

Das Entscheidungsproblem, ob in einem MARA-Szenario eine Allokation A existiert, sodass $\mathcal{I}(A) = 0$ gilt, nennen wir PERFECT INDEX OPTIMISATION (PIO) (A.1.2: Problem 6). Dieses Entscheidungsproblem ist bereits für sehr eingeschränkte Fälle NP-vollständig.³ Die NP-Schwere zeigen wir im Beweis von Proposition 2 [72] durch eine Polynomialzeitreduktion vom NP-vollständigen Problem PARTITION (A.1.1: Problem 2). Die Proposition 2 ist zwar für den Atkinson-Index formuliert, die Aussage überträgt sich aber direkt auf das Entscheidungsproblem, ob egalitäre Allokationen existieren, man beachte hierzu die Rolle von Lemma 1 im Beweis der Proposition. Die Aussage gilt demzufolge für alle Funktionen, die egalitäre von nicht egalitären Allokationen unterscheiden können. Infolgedessen gilt sie für alle Ungleichverteilungsmaße und auch für die nicht normierten Ansätze zur Messung von Ungleichheit, wie z. B. die Varianz (man vgl. z. B. den Artikel von Allison [2]).

³Und zwar insbesondere für den Fall von zwei Agenten mit sogenannten symmetrischen und additiven Nutzenfunktionen.

3. The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation

Für weniger restriktive Fälle lässt sich darüber hinaus zeigen, dass PIO sogar ein *stark* NP-schweres Problem ist, d. h. unter der Annahme $P \neq NP$ gibt es keinen pseudo-polynomiellen Algorithmus, der PIO löst (vgl. Garey und Johnson [45, S.90]). Im Appendix A.1.2 zeigen wir als Beispiel für eine Polynomialzeitreduktion von einem klassischen Problem der Komplexitätstheorie auf ein ComSoC-Problem die Reduktion von dem (stark NP-schweren) Problem 3-PARTITION (A.1.1: Problem 3) auf das PIO-Problem. Dieses Resultat ist zur Veröffentlichung vorgesehen (Schneckenburger et al. [71]).

3.2.2. Der dezentralisierte Ansatz

Im Gegensatz zu den zu MARA nahe verwandten kombinatorischen Auktionen (vgl. Nisan [63] und Chevaleyre et al. [18]) muss die rechnerische Last der Bestimmung einer optimalen Lösung bei unserem Ansatz nicht von einer Zentralinstanz getragen werden. Der sogenannte *dezentralisierte Ansatz* (engl. *distributed approach*) zielt darauf ab, diese Last auf viele Parteien (d. h. die Agenten) zu verteilen. Die Anwendung für MARA geht auf Ideen von Sandholm [69] zurück und wurde von Endriss et al. [35, 34] als erstes explizit für MARA formuliert. Den Kern dieses Ansatzes stellen Paare (A, A') von Allokationen dar, die sogenannten *Deals*. Die Allokation A stellt die Allokation vor dem Deal dar und A' die Allokation, nachdem der Deal zustande gekommen ist. Anschaulich stellen die Deals Handelsprozesse dar: Agenten handeln, tauschen und kaufen oder verkaufen die Güter. Dies alles geschieht in mehreren Runden und mit der Möglichkeit, mehrere Agenten in einzelne Handelsschritte miteinzubeziehen. Es sind also explizit multilaterale Aktionen erlaubt. Natürlich kann man von jeder Allokation A aus eine gesuchte optimale Allokation A^* mit dem Deal $\delta = (A, A^*)$ erreichen. Die Suche nach diesem Deal wäre aber dann genau so schwierig wie eine Berechnung durch eine Zentralinstanz. Man erhofft sich eine (optimalerweise möglichst kurze) Folge von nicht zu komplexen (d. h. unter der Beteiligung von jeweils möglichst wenig Gütern und Agenten) Deals, die mit einer optimalen Allokation abschließt. Wir nennen dies *zu einer optimalen Allokation konvergieren*. Lassen wir beliebige Deals zu, kann es zu Schleifen kommen und Konvergenz ist nicht mehr garantiert. Die Klasse der zulässigen Deals schränken wir durch lokale Kriterien für Deals ein. Bei lokalen Kriterien ist nur anhand von Informationen, die den beteiligten Agenten zugänglich sind, entscheidbar, ob der Deal das lokale Kriterium erfüllt. Eine Folge lokaler Deals *terminiert* in einer Allokation A (bzw. ist *terminal*), wenn es keine Allokation A' gibt,

sodass der Deal (A, A') das entsprechende lokale Kriterium erfüllt. Das zu optimierende Kriterium für Allokationen ist im Gegensatz zu den *lokalen Deals* *global* definiert, d. h. es wertet immer Informationen von allen Agenten aus. Zwar können auch bei lokalen Deals alle Agenten beteiligt sein, dies ist aber nicht zwingend der Fall. Für den dezentralisierten Ansatz ist es entscheidend, ein passendes lokales Kriterium für Deals zu identifizieren, sodass ein Deal, der das lokale Kriterium erfüllt, zwingend das globale Kriterium verbessert.

Betrachten wir diesen Ansatz für das Nash-Produkt. Für einen Deal $\delta = (A, A')$ bezeichnen wir mit $\mathcal{N}^\delta := \{i \in \mathcal{N} \mid A(i) \neq A'(i)\}$ die in den Deal involvierten Agenten. Für ein beliebiges Szenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ und einen Deal $\delta = (A, A')$ gilt stets:

$$\prod_{i \in \mathcal{N}^\delta} u_i(A(i)) < \prod_{i \in \mathcal{N}^\delta} u_i(A'(i)) \iff \underbrace{\prod_{i \in \mathcal{N}} u_i(A(i))}_{=sw_{nash}(A)} < \underbrace{\prod_{i \in \mathcal{N}} u_i(A'(i))}_{=sw_{nash}(A')}.$$

Von Ramezani und Endriss [66] stammt die Bezeichnung *Nash-Deals* für Deals, die die Ungleichung $\prod_{i \in \mathcal{N}^\delta} u_i(A(i)) < \prod_{i \in \mathcal{N}^\delta} u_i(A'(i))$ erfüllen. Sie zeigen folgendes Theorem:

Theorem (Ramezani und Endriss [66]). *Für jedes Szenario und jede Startallokation terminiert jede Folge von Nash-Deals in einer Allokation, die optimal für die soziale Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt ist.*

Theoreme wie das von Ramezani und Endriss sind die Grundlage für den dezentralisierten Ansatz. Die Grundidee ist, dass wir durch lokales (und insbesondere kurzsichtiges) Handeln dem globalen Optimum näher kommen. Das erste Konvergenztheorem für den dezentralisierten Ansatz stammt von Sandholm [69] für die utilitaristische soziale Wohlfahrt.⁴ Wir verwenden hier die an MARA adaptierte Notation von Endriss und Maudet [34]. Für ein Szenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ und einen Deal $\delta = (A, A')$ gilt stets:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}^\delta} u_i(A(i)) < \sum_{i \in \mathcal{N}^\delta} u_i(A'(i)) \iff \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(A(i))}_{=sw_{util}(A)} < \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(A'(i))}_{=sw_{util}(A')}.$$

Der Sachverhalt $\sum_{i \in \mathcal{N}^\delta} u_i(A(i)) < \sum_{i \in \mathcal{N}^\delta} u_i(A'(i))$ lässt sich auch durch die Existenz einer Payment-Funktion ausdrücken. Diese Funktion implementiert Ausgleichszahlun-

⁴Sandholm untersuchte Fragen in Verbindung mit *anytime task reallocation*, die zu optimierende globale Eigenschaft sind dort die (Rechen-)Kosten für die Aufgaben. Der Schritt von der Minimierung dieser Kosten zur Maximierung eines Gesamtnutzen ist klein.

3. The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation

gen zwischen den „Gewinnern“ und „Verlierern“ eines Deals. Solche Deals werden deswegen *individuell rationale* Deals genannt.

Theorem (Sandholm [69] / Endriss und Maudet [34]). *Für jedes Szenario und jede Startallokation terminiert jede Folge individuell rationaler Deals in einer Allokation mit maximaler utilitaristischer sozialer Wohlfahrt.*

In dieser Interpretation führt also lokales, kurzsichtiges und vor allem rationales Handeln (rational im Sinne der Spieltheorie) zu einem für alle optimalen Ergebnis. Das Theorem von Endriss und Ramezani zeigt jedoch, dass der dezentralisierte Ansatz sich auch auf andere Kriterien als die utilitaristische soziale Wohlfahrt verallgemeinern lässt und weiter nicht die Annahme von rationalen (d. h., selbstsüchtigen) Agenten benötigt wird. Wichtig ist nur, dass die Agenten sich als Kollektiv einig sind, welches Kriterium zu optimieren ist. Mithilfe des dezentralisierten Ansatzes lässt sich für ein MARA-Szenario unter bestimmten Voraussetzungen stets eine Allokation finden, die ein beliebiges, vorgegebenes globales Kriterium K optimiert. Die Voraussetzungen sind:

1. Die Agenten müssen lokal handeln können (dies bedeutet insbesondere, dass sie lokal Informationen austauschen können).
2. Die Menge der möglichen Allokationen muss endlich sein (dies ist immer erfüllt, falls \mathcal{N} und \mathcal{G} endlich sind).
3. Es muss eine Verbindung zwischen dem globalen Kriterium K für Allokationen und einem lokalen Kriterium k für Deals geben. Für zwei Allokationen A und A' muss gelten: Der Deal (A, A') erfüllt das lokale Kriterium k genau dann, wenn A' echt besser im Sinne von K ist als A .

Theorem (Metatheorem der Konvergenz des dezentralisierten Ansatzes). *Für jedes Szenario und jede Startallokation terminiert jede Folge von Deals, die das lokale Kriterium k erfüllen, in einer Allokation, die optimal für das globale Kriterium K ist.*

Beweis. Da es nur endlich viele Allokationen gibt, ist jede Folge ohne Schleifen endlich. Da jeder Deal in der Folge in einer besseren Allokation bezüglich K endet, sind Schleifen ausgeschlossen. Angenommen, eine Folge endet nicht in einer Allokation A , die optimal bezüglich K ist, dann erfüllt der Deal (A, A^*) für eine von A verschiedene Allokation A^* , die optimal für das Kriterium K ist, das lokale Kriterium k und die Folge war noch nicht terminal. □

Lässt sich für ein lokales Kriterium k nachweisen, dass es keine Schleifen zulässt, so kann man die 3. Voraussetzung abschwächen zu

- 3.* Es muss eine Verbindung zwischen dem globalen Kriterium K für Allokationen und einem lokalen Kriterium k für Deals geben. Für zwei Allokationen A und A' muss gelten: Wenn A' echt optimaler im Sinne von K ist als A , dann erfüllt der Deal (A, A') das lokale Kriterium k .

Mithilfe dieser Anpassung lassen sich aus dem Metatheorem auch entsprechende Konvergenzresultate für andere globale Kriterien, wie u. a. der Pareto-Optimalität und der egalitären sozialen Wohlfahrt⁵ ziehen (vgl. den Artikel von Endriss et al [35]).

3.3. Ergebnisse

3.3.1. Semi-lokale Deals

Die erste Frage bei der Analyse des dezentralisierten Ansatzes ist, ob wir das globale Kriterium der Ungleichheit von Allokationen mit einem lokalen Kriterium für Deals verknüpfen können. Dass dies für den Atkinson-Index nicht möglich ist, zeigt Proposition 3 der Publikation anhand eines Beispiels. Deals mit identischer lokaler Information können je nach Szenario zu einer Verringerung oder Erhöhung der Ungleichheit führen. Dieses Beispiel ist auch im Appendix A.2 aufgeführt (Beispiel 14). Das grundlegende Problem ist, dass die Berechnung des Atkinson-Index sowohl die Bestimmung des arithmetischen als auch die des geometrischen Mittelwerts des Nutzenvektors beinhaltet. Im Wesentlichen ist der Atkinson-Index nichts anderes als das Verhältnis dieser beiden Mittelwerte. Bei beiden lassen sich zwar Änderungen anhand eines lokalen Kriteriums detektieren. Wir können allerdings nicht anhand lokaler Informationen entscheiden, welche Änderung bezüglich des Verhältnisses der beiden Mittelwerte stärker ins Gewicht fällt. Um dieses Problem zu umgehen, führen wir ein semi-lokales Kriterium ein. Die Grundidee ist, das arithmetische Mittel μ zentral (und für alle Agenten abfragbar) zu speichern. Es muss einmal für die Startallokation *global* berechnet werden, d. h. unter Einbeziehung aller Agenten. Für eine Deal-Folge wird der Wert $\mu(A')$ dann iterativ für jeden Deal $\delta = (A, A')$ *semi-lokal* über die Formel $\mu(A') = \mu(A) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i \in \mathcal{N}^\delta} (u_i(A') - u_i(A))$ neu berechnet. Man beachte, dass wir

⁵ $swegal(A) = \min_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)$.

3. The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation

zur Neuberechnung von μ tatsächlich nur lokale Informationen (d. h. von Agenten in \mathcal{N}^δ) benötigen. Nun können wir unser semi-lokales Kriterium für Deals einführen. Wir nennen einen Deal $\delta = (A, A')$ einen *Atkinson-Deal* genau dann, wenn er die Bedingung

$$\frac{\sqrt[n]{\prod_{i \in \mathcal{N}^\delta} u_i(A)}}{\mu(A)} < \frac{\sqrt[n]{\prod_{i \in \mathcal{N}^\delta} u_i(A')}}{\mu(A) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i \in \mathcal{N}^\delta} (u_i(A') - u_i(A))} \quad (3.1)$$

erfüllt. Es gilt: $\delta = (A, A')$ ist ein Atkinson-Deal genau dann, wenn $\mathcal{I}(A) > \mathcal{I}(A')$. Somit haben wir ein semi-lokales Kriterium mit dem Atkinson-Index verknüpft. Auf der Grundlage dieses semi-lokale Kriteriums können wir nun für den dezentralisierten Ansatz ein Konvergenztheorem bezüglich des Atkinson-Index formulieren und beweisen.

Theorem 1 (Theorem 4 [72]). *Für jedes Szenario und jede Startallokation terminiert jede Folge von Atkinson-Deals in einer Allokation mit minimaler Ungleichheit nach dem Atkinson-Index.*

Das Theorem folgt als Korollar aus dem Metatheorem (Theorem 3.2.2). Der Vollständigkeit halber führen wir den Beweis hier trotzdem aus:

Beweis. Da es nur endlich viele Allokationen gibt, muss jede Folge ohne Schleifen enden. Da jeder Deal (A, A') der Folge ein Atkinson-Deal ist, gilt jeweils $\mathcal{I}(A) > \mathcal{I}(A')$ und Schleifen sind ausgeschlossen. Angenommen, eine Folge endet nicht in einer Allokation A , die minimal bezüglich des Atkinson-Index ist, dann existiert eine von A verschiedene Allokation A^* , die minimal bezüglich des Atkinson-Index ist. Der Deal (A, A^*) ist somit ein Atkinson-Deal und die Folge war noch nicht terminal. \square

3.3.2. Übersicht über die Ergebnisse

Theorem 1 zeigt, dass der dezentralisierte Ansatz verwendet werden kann, um Allokationen zu finden, die minimale Ungleichheit (gemessen mit dem Atkinson-Index) aufweisen. Wie unsere weiteren Analysen ergeben, können dabei jedoch Schwierigkeiten zweierlei Art auftauchen. Wie Theorem 2 zeigt, können beliebig komplexe Deals notwendig sein, um eine optimale Allokation zu erreichen. Weiter gibt es Szenarien, bei denen die Folge der Deals exponentiell lang werden kann. Nach Theorem 3 existieren Szenarien, bei den alle möglichen $|\mathcal{N}^G| = n^m$ verschiedenen Allokationen einen unterschiedlichen Wert für \mathcal{I} annehmen. Die Grundproblematik des zentralisierten

Allokationsprozesses, nämlich die, dass wir es hier im Allgemeinen mit NP-schweren Problemen zu tun haben, bleibt bestehen. Vereinfacht gesagt, tauschen wir *Berechnungskomplexität* (engl. *computational complexity*⁶) gegen *Transaktionskomplexität* (engl. *deal complexity*⁷).

Theorem 2 (Theorem 8 [72]). *Für jeden Deal δ existieren Nutzenfunktionen und eine Startallokation, sodass δ notwendig ist, um eine Allokation mit minimaler Ungleichheit nach dem Atkinson-Index durch (und nur durch) Atkinson-Deals zu erreichen.*

Theorem 3 (Theorem 12 [72]). *Eine Folge von Atkinson-Deals, die zu einer Allokation mit minimaler Ungleichheit nach dem Atkinson-Index führt, kann aus bis zu $|\mathcal{N}|^{|\mathcal{G}|} - 1$ einzelnen Deals bestehen.*

Diese Ergebnisse sind vergleichbar mit Resultaten bezüglich notwendiger Deals für andere Kriterien, man vergleiche z. B. die Publikation von Endriss und Maudet [34] für sw_{util} und die Publikation von Ramezani und Endriss [66] für sw_{nash} . Für Theorem 2 ist bemerkenswert, dass für die Kriterien sw_{util} und sw_{nash} unabhängig zerlegbare Deals nie notwendig sind und dementsprechend die analogen Aussagen zu Theorem 2 nur für nicht unabhängig zerlegbare Deals gelten. Ein Deal $\delta = (A, A'')$ heißt *unabhängig zerlegbar* (engl. *independently decomposable*), falls er in unabhängige Transaktionen zerlegt werden kann. Dies führen wir in der Erläuterung zu Proposition 1 genauer aus. Dass der dezentralisierte Ansatz in diesem Sinne für den Atkinson-Index im Verhältnis schlechter funktioniert, wird von uns auch in Beispiel 2 der Publikation [72] erläutert. Hier werden ein Szenario und eine Startallokation betrachtet, sodass ein unabhängig zerlegbarer Deal notwendig ist, um eine optimale Allokation zu erreichen. Dieses Beispiel ist mit weiteren Erläuterungen im Appendix A.2.4 (Beispiel 14) aufgeführt.

3.3.3. Beweistechniken

Was die Publikation Schneckenburger et al. [72] auszeichnet, sind weniger die Ergebnisse, sondern die verwendeten Beweistechniken. Zur Konstruktion von *Worst-*

⁶Dies ist die Komplexität im Sinne der klassischen Komplexitätstheorie, vgl. Appendix A.1.

⁷In den ersten Werken über den distributiven Ansatz wurde für die Problematik der komplexen Deals der Ausdruck *communication complexity* verwendet (Endriss und Maudet [34, 33]), allerdings wird dieser Ausdruck im Gebiet *distributed computing* schon länger und mit einer abweichenden Bedeutung verwendet (man vergleiche die Publikation von Yao [76]). Um diese Problematik zu umgehen, verwenden wir hier den Begriff Transaktionskomplexität für beide problematischen Aspekte, dies ist allerdings kein Standardausdruck.

3. The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation

Case-Instanzen verwenden wir implizite Konstruktionen anhand von Argumenten der klassischen Analysis. Dies steht im Gegensatz zum üblichen Beweisansatz in diesem Gebiet. Meistens werden hier Worst-Case-Instanzen explizit anhand kombinatorischer bzw. zahlentheoretischer Argumente konstruiert. Ein Beispiel ist die Konstruktion einer Worst-Case-Instanz mit maximaler Pfadlänge bezüglich Nash-Deals von Ramezani und Endriss [66]. Hier wird als Argument die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung verwendet. Der Beweis findet sich auch im Appendix A.2.2 (Lemma 3).

Für die Konstruktion einer *Worst-Case-Instanz* (unabhängig von der gegebenen Fragestellung) ist der Grundansatz jeweils gleich. Für eine gegebene Agentenmenge \mathcal{N} und Gütermenge \mathcal{G} wollen wir eine passende Familie von Nutzenfunktionen \mathcal{U} konstruieren, sodass $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ eine entsprechende *Worst-Case-Instanz* ist. Unsere Konstruktionen beruhen dabei auf zwei ungewöhnlichen Ansätzen.

Wir fassen \mathcal{U} als $n \times 2^m$ Matrix auf. Hierbei nehmen wir eine feste (aber prinzipiell beliebige) Anordnung aller möglichen Bündel (B_1, \dots, B_{2^m}) an. Jede Zeile dieser Matrix soll als Einträge alle Nutzwerte eines Agenten (das heißt für jedes der 2^m Bündel) beinhalten. Weiter definieren wir die Einträge dieser Matrix nicht explizit, sondern implizit und rekursiv. Der Wert eines jeweils festzulegenden Eintrages wird implizit anhand von Eigenschaften einer Menge von Hilfsfunktionen bestimmt. Als erste Idee hilft die Vorstellung, dass diese Hilfsfunktionen für alle möglichen Allokationen die möglichen Werte des Atkinson-Index in Abhängigkeit von dem noch nicht festgelegten Eintrag angeben. In der Konstruktion einer *Worst-Case-Instanz* mit maximaler Pfadlänge bezüglich Atkinson-Deals ist diese Familie der Hilfsfunktionen etwas komplizierter strukturiert. Darauf gehen wir am Ende dieses Abschnittes ein. Zunächst zeigen wir den einfachen Typ von Hilfsfunktionen, wie er im Beweis von Theorem 5 der Publikation Schneckenburger et al. [72] Verwendung findet.

Beispiel 2. Angenommen, wir haben nur den Eintrag $u_k(B_j)$ von \mathcal{U} noch nicht festgelegt und markieren diesen vorläufig als Variable \mathbf{x} . Dies induziert für jeden Nutzenvektor \mathbf{u} , in dem \mathbf{x} an der Stelle k auftaucht (notiert durch $\mathbf{u} = (u^{(1)}, \dots, u^{(k-1)}, \mathbf{x}, \dots)$), eine Funktion $F_{\mathbf{u}}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1]$ mittels

$$\mathbf{x} \mapsto 1 - \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{k-1} u^{(i)} \cdot \mathbf{x} \cdot \prod_{i=k+1}^n u^{(i)}}}{\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{k-1} u^{(i)} + \mathbf{x} + \sum_{i=k+1}^n u^{(i)})}.$$

Diese Hilfsfunktionen $F_{\mathbf{u}}$ beschreiben die möglichen Werte des Atkinson-Index für dieses Szenario in Abhängigkeit von der Variable \mathbf{x} . Genauer gesagt beschreiben sie

die möglichen Werte des Atkinson-Index für die Allokationen, in denen das Bündel B_j dem Agenten k zugeordnet wird.

Als Beispiel für diese Beweistechniken dient uns der Beweis der folgenden Proposition 1, die den einfacher zu beweisende Spezialfall von nicht *unabhängig zerlegbaren* Deals von Theorem 2 abdeckt. Ein Deal $\delta = (A, A'')$ heißt unabhängig zerlegbar, falls er zwei getrennte Transaktionen beinhaltet, d. h. es gibt eine Allokation A' , sodass für die Deals $\delta_1 = (A, A')$ und $\delta_2 = (A', A'')$ gilt, dass $\mathcal{N}^{\delta_1} \cap \mathcal{N}^{\delta_2} = \emptyset$. Der Beweis für Theorem 2 ist noch nicht veröffentlicht, er ist in Appendix A.2.5 zu finden und Teil der bisher unveröffentlichten Journalversion (Schneckenburger et al. [71]). Aus Platzgründen geben wir hier und in der Publikation nur den Beweis für den Fall von nicht unabhängig zerlegbaren Deals.

Proposition 1 (Lemma 7 [72]). *Für jeden nicht unabhängig zerlegbaren Deal δ existieren Nutzenfunktionen und eine Startallokation, sodass δ notwendig ist, um eine Allokation mit minimaler Ungleichheit nach dem Atkinson-Index durch (und nur durch) Atkinson-Deals zu erreichen.*

Beweis. Für den gegebenen Deal $\delta = (A, A')$ konstruieren wir ein passendes \mathcal{U} . Da A und A' unterschiedlich sind, gibt es mindestens einen Agenten, für den sich das zugeordnete Bündel ändert. Wir wählen genau einen solchen Agenten aus und bezeichnen ihn im Folgenden mit j . Es gilt also $A(j) \neq A'(j)$. Wir legen den Wert für $u_j(A(j))$ vorerst nicht fest und setzen ihn auf $1 - x$ (unter der Annahme von $0 < x < 1$). Allgemein legen wir die Einträge von \mathcal{U} bündelweise folgendermaßen fest:

$$u_i(B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } A'(i) = B, \\ 1 & \text{falls } (i \neq j) \text{ und } A(i) = B, \\ 1 - x & \text{falls } (i = j) \text{ und } A(i) = B, \\ i + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass $\mathcal{I}(A') = 0$ gilt. Durch die Allokation A wird der Nutzenvektor $\mathbf{u} = (1, \dots, 1, \underbrace{1 - x}_{\sim u_j(A(j))}, 1, \dots)$ induziert und somit die Hilfsfunktion $F_{\mathbf{u}}$:

$$F_{\mathbf{u}} : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto 1 - \frac{\sqrt[n]{1-x}}{1-\frac{x}{n}}.$$

3. The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation

Man bemerke, dass $F_u(0) = 0$, $F_u(1) = 1$, und F_u streng monoton wachsend ist (da $\frac{d}{dx}F_u(x) = \frac{(n-1)x(1-x)^{\frac{1}{n}-1}}{(n-x)^2} > 0$ für alle $x \in [0, 1[$ gilt). Somit ist F_u bijektiv.

Wir unterscheiden im Folgenden zwei verschiedenen Typen von Allokationen (abgesehen von A und A') in Bezug auf den ausgewählten Agenten j : Allokationen des ersten Typs stimmen für Agent j mit A überein, Allokationen des zweiten Typs nicht.

Betrachten wir zunächst die Allokationen des ersten Typs, die wir jeweils mit \tilde{A} kennzeichnen. Es gelte also $\tilde{A} \neq A$ und $\tilde{A}(j) = A(j)$. Diese Allokationen \tilde{A} induzieren Nutzenvektoren $\tilde{u} = (t_1, \dots, t_{j-1}, 1 - x, t_{j+1}, \dots, t_n)$ mit $t_i \geq 1$ für alle $i \neq j$, wobei für mindestens ein i gilt, dass $t_i > 1$. Für die jeweiligen induzierten Hilfsfunktionen $F_{\tilde{u}}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gilt $0 < F_{\tilde{u}}(0)$, was man (analog zu Lemma 1) anhand der Ungleichheit zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel zeigt. Weiter lässt sich leicht berechnen, dass $\frac{d}{dx}F_{\tilde{u}}(x) > 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Insbesondere ist somit die Familie von Funktionen $\{F_{\tilde{u}}\}_{\tilde{u}}$ echt nach unten beschränkt, d. h. es gibt ein $\varepsilon_1 > 0$ so, dass $0 < \varepsilon_1 < F_{\tilde{u}}(x)$ für alle \tilde{u} und alle $x \in [0, 1]$.

Nun zu den Allokationen des zweiten Typs, jeweils mit A^* gekennzeichnet. Es gelte also $A^* \neq A, A'$ und $A^*(j) \neq A(j)$. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{I}(A^*) > 0$. Da der Deal δ nicht unabhängig zerlegbar ist, gibt es mindestens ein Paar k, ℓ von Agenten mit $u_k(A^*) \neq u_\ell(A^*)$. Andernfalls gilt $u_i(A^*) = 1$ für alle $i \in \mathcal{N}$, was bedeuten würde, dass A^* entweder mit A oder A' für jeden Agenten übereinstimmen würde, d. h., δ wäre zerlegbar in die Deals (A, A^*) und (A^*, A') , was einen Widerspruch zu unserer Annahme darstellen würde. Demzufolge gilt nach Lemma 1, dass $\mathcal{I}(A^*) > 0$. Da es nur endlich viele solche Allokationen gibt, erhalten wir $\min_{A^* \neq A, A'} \mathcal{I}(A^*) > 0$. Nun wählen wir ε_2 mit $0 < \varepsilon_2 < \min_{A^* \neq A, A'} \mathcal{I}(A^*)$ und setzen dann x so, dass $\mathcal{I}(A) = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Somit haben wir $0 = \mathcal{I}(A') < \mathcal{I}(A) \leq \varepsilon_2 < \min_{A^* \neq A, A'} \mathcal{I}(A^*)$ und auch $\mathcal{I}(A) \leq \varepsilon_1 < \mathcal{I}(\tilde{A})$ für jede Allokation \tilde{A} vom ersten Typ. Deswegen ist in diesem Szenario ausgehend von der Startallokation A aus der Deal $\delta = (A, A')$ der einzige Deal, der \mathcal{I} reduziert, und infolgedessen auch der einzige Atkinson-Deal. \square

Die Existenz eines passenden Werts für den festzulegenden Eintrag in \mathcal{U} haben wir insbesondere mit Argumenten der Infinitesimalrechnung nachgewiesen. Konkret haben wir dafür die Differenzierbarkeit der Funktion F_u verwendet, um ihre Bijektivität zu zeigen, und im letzten Schritt die Stetigkeit der Funktion verwendet (konkret die Stetigkeit im Sinne des Epsilon-Delta-Kriteriums im Punkt $x_0 = 0$).

Beim dezentralisierten Ansatz können also im Sinne der Transaktionskomplexität beliebig komplexe Deals auftreten. Nun kommen wir zum Beweis von Theorem 3, das besagt, dass im schlimmsten Fall eine exponentiell Anzahl von Atkinson-Deals benötigt werden kann. Theorem 3 folgt direkt aus dem folgenden Lemma 2.

Lemma 2 (Lemma 11 [72]). *Für jedes \mathcal{N} und jedes \mathcal{G} gibt es ein \mathcal{U} , sodass im Szenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ für zwei unterschiedliche Allokationen $A \neq A'$ stets $\mathcal{I}(A) \neq \mathcal{I}(A')$ gilt. Der Atkinson-Index nimmt demzufolge $|\mathcal{N}|^{|\mathcal{G}|}$ unterschiedliche Werte an.*

Um zu zeigen, dass es Szenarien gibt, bei denen jede Allokation einen unterschiedlichen Wert für den Atkinson-Index annimmt, müssen wir zu gegebenen \mathcal{N} und \mathcal{G} ein \mathcal{U} so konstruieren, dass in diesem Szenario für zwei Allokationen $A \neq A'$ stets $\mathcal{I}(A) \neq \mathcal{I}(A')$ gilt. Dies machen wir nun anhand einer rekursiven Konstruktion von \mathcal{U} . Für das Nash-Produkt zeigen Ramezani und Endriss [66] die analoge Aussage anhand einer Korrespondenz der Nutzenfunktionen zu Primzahlpotenzen und mithilfe der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Die unfertige Matrix \mathcal{U} bezeichnen wir in Anlehnung daran mit P . Vor der Festlegung des Eintrages $p_{\ell,k}$ der Matrix P haben wir die Situation, wie sie in Abbildung 3.1 dargestellt ist.

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & p_{1,2^m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{\ell-1,1} & \dots & p_{\ell-1,k-1} & p_{\ell-1,k} & p_{\ell-1,k+1} & \dots & p_{\ell-1,2^m} \\ p_{\ell,1} & \dots & p_{\ell,k-1} & \mathbf{x} & * & \dots & * \\ * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Abbildung 3.1.: Die Matrix P vor einem Rekursionsschritt im Beweis von Lemma 2. Der festzulegende Eintrag wird durch die Variable \mathbf{x} repräsentiert. (Schneckenburger et al. [72])

Mit $P^{(\ell-1)}$ bezeichnen wir die Menge der Vektoren $p = (p(1), p(2), \dots, p(\ell-1))$, die Element des kartesischen Produktes der ersten $\ell-1$ Zeilen von P sind. Für jeden Rekursionsschritt definieren wir nun eine Familie von Hilfsfunktionen $\{f_p\}$ mittels

$$f_p: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto 1 - \frac{\sqrt[\ell]{\prod_p \cdot x}}{\frac{1}{\ell}(\sum_p + x)},$$

3. The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation

wobei wir die Kurznotationen $\prod_p = \prod_{i=1}^{\ell-1} p(i)$ und $\sum_p = \sum_{i=1}^{\ell-1} p(i)$ benutzen. Man bemerke, dass diese Familie von Hilfsfunktionen die Hilfsfunktionen wie in Beispiel 2 in mehrerlei Hinsicht verallgemeinern. So sind die Vektoren p eine Verallgemeinerung der Nutzenvektoren von Allokationen. Jeder Vektor p präsentiert ein Objekt, das man als „partielle potentielle Allokation“ bezeichnen könnte. Mit „partieLL“ meinen wir an dieser Stelle zweierlei. Zum einen, was üblicherweise als partielle Allokation bezeichnet wird, nämlich, dass durch die zu p korrespondieren Abbildungen $\tilde{A}: \mathcal{N} \rightarrow 2^{\mathcal{G}}$ nicht die gesamte Gütermenge zugeteilt wird. Zum anderen wollen wir damit ausdrücken, dass nicht alle Agenten mit aufgeführt sind (sondern nur jeweils die ersten $\ell - 1$). Mit dem Wort „potentiell“ soll die Tatsache beschrieben werden, dass wir Vektoren zulassen, bei denen die korrespondierenden Bündel nicht disjunkt sein müssen. So ist zum Beispiel in jedem $P^{\ell-1}$ der Vektor $p = (p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{1,\ell-1})$ enthalten, der die Nutzwerte der Agenten 1 bis $\ell - 1$ für das Bündel B_1 als Einträge enthält.

Für den Rekursionsschritt müssen wir nun jeweils einen Wert für x_0 für \mathbf{x} so festlegen, dass die Funktion

$$\mathcal{F}: (P^{(\ell-1)} \times [0, \infty)) \Big|_{(P^{(\ell-1)}, x_0)} \rightarrow [0, 1]$$

$$(p, x_0) \mapsto 1 - \frac{\sqrt[n]{\prod_p \cdot x_0}}{\frac{1}{n}(\sum_p + x_0)}$$

injektiv ist, sowie keinen der Werte aus der Menge $\{\mathcal{F}(p, p_{(\ell,i)})\}_{p \in P^{\ell-1}, 1 \leq i < k}$ annimmt. Für den Rekursionsstart machen wir uns dabei ein kombinatorisches Argument aus der Modulorechnung zunutze (Lemma 8 in der Publikation Schneckenburger et al. [72]). Für den Rekursionsschritt machen wir uns Eigenschaften der Funktionsfamilien $\{f_p\}$ zunutze und verwenden dabei ähnliche Methoden wie in den Beweisen von Proposition 1 und Theorem 2. Nun definieren wir

$$\mathcal{U}_{\mathcal{N}, \mathcal{G}} := \{\mathbf{u}(A) : A \text{ ist eine Allokation in } \langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle\},$$

es gilt $\mathcal{U}_{\mathcal{N}, \mathcal{G}} \subseteq P^{(n)}$ und $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_{\mathcal{N}, \mathcal{G}}} = \mathcal{I}|_{\mathcal{U}_{\mathcal{N}, \mathcal{G}}}$ (dies folgt aus den Überlegungen zu „potentiellen partiellen Allokationen“), was den Beweis vervollständigt.

3.4. Fazit und Ausblick

Wir konnten den dezentralisierten Ansatz erfolgreich auf die Fragestellung nach optimalen Allokationen bezüglich des Atkinson-Index anwenden. Nichtsdestotrotz zeigt unsere Worst-Case-Analyse, dass Instanzen existieren, bei denen der Rechenaufwand unverhältnismäßig groß werden kann. Während diese Ergebnisse vergleichbar mit den Ergebnissen ähnlicher Fragestellungen für soziale Wohlfahrten sind, sind unsere Konstruktionsmethoden neu für dieses Feld. Für weiterführende Forschung bieten sich folgende Fragestellungen an:

1. Ist eine ähnliche Analyse für andere Ungleichverteilungsmaße möglich? Es gibt starke Indizien dafür, dass dies jeweils nur durch die Lockerung der Anforderung von *lokalen* zu *semi-lokalen* Kriterien für Deals möglich ist: Im Prinzip bezieht sich jedes Ungleichverteilungsmaß in irgendeiner Weise auf das arithmetische Mittel, wie schon von Atkinson [7] angemerkt wurde.
2. Wie problematisch sind die Resultate unserer Worst-Case-Analyse für die Praxis? Dies könnte durch Simulationen auf Datensätzen (sowohl künstlich erzeugten als auch empirisch ermittelten) geschehen. Dabei könnte man die Simulationen auf Deals beschränken, die eine vorgegebene Komplexität nicht überschreiten. Wie oft würde das distributive Verfahren dann vor dem Erreichen des globalen Optimums abbrechen?
3. Wie sieht es mit einfacheren Spezialfällen aus? Lassen sich durch eine Restriktion der erlaubten Nutzenfunktionen oder Allokationen bessere Ergebnisse erzielen?

In einem noch unveröffentlichten Artikel für eine Fachzeitschrift zeigen wir Resultate für die letzte Fragestellung (Schneckenburger et al. [71]). Konkret untersuchen wir die Einschränkung auf symmetrische, monotone und submodulare Nutzenfunktionen. Des Weiteren enthält diese Journalversion die aus Platzgründen in der Publikation ausgelassenen oder gekürzten Beweise.

4. Simplified Group Activity Selection

Das Nachmittagsproblem aus der Einleitung (Seite 3 f.) ist ein Beispiel für eine spezielle Art eines Zuordnungsproblems, das wir in den Arbeiten *On Simplified Group Activity Selection* [22] und *Simplified Group Activity Selection* [23] untersuchen. Mit dem Ausdruck *Simplified Group Activity Selection Problem* (s-GASP) bezeichnen wir Probleme, die sich folgendermaßen beschreiben lassen: In einer Gruppe von Agenten hat jeder Agent eine individuelle Präferenz über eine Auswahl von Aktivitäten, an denen die Agenten teilnehmen können. Die Lösungsmenge des Problems besteht aus Zuordnungen von Teilnehmern zu Aktivitäten, die Menge der zulässigen Lösungen unterliegt jedoch Beschränkungen. In den beiden Publikationen konzentrieren wir uns auf Beschränkungen in der Form unterer und oberer Schranken bezüglich der Teilnehmerzahlen.¹ Wir haben hier also ein Matchingproblem (Teilnehmer zu Aktivitäten) und ein Koalitionsbildungsproblem (die Teilnehmer einer Aktivität bilden eine Koalition), bei dem insbesondere das Matchingproblem kein direktes Teilproblem des Koalitionsbildungsproblems ist. Als Inspiration dienen u. a. die folgenden Beispiele (für diese und weitere Probleme dieser Art vergleiche den Artikel von Darmann et al. [22]).

1. In einer Arbeitsgruppe muss entschieden werden, wer an welchem Projekt mitarbeitet, wobei jedes Projekt eine feststehende Anzahl von Mitarbeitern erfordert.
2. Teilnehmer einer Vorlesung müssen auf Übungsgruppen verteilt werden. Damit eine Übungsgruppe zustande kommt, muss sie eine Mindestanzahl an Teilnehmern haben. Die Übungsgruppen dürfen aber auch nicht beliebig groß werden.
3. Eine Menge an Wählern muss ein Komitee von k Repräsentanten auswählen, sodass jeder Wähler von einem Komiteemitglied repräsentiert wird.

Das s-GASP ist eine Variante² des *Group Activity Selection Problem* (GASP) (eingeführt von Darmann et al. [20]). Im Modell GASP gibt es keine Beschränkungen,

¹Andere Beschränkungen wären etwa „es finden max. k Aktivitäten statt“ oder „die Teilnehmerzahlen müssen ausgewogen sein“. Es sind auch Kombinationen dieser drei Beschränkungen denkbar.

²Das s-GASP ist jedoch kein einfacher Spezialfall von GASP. Im Appendix A.3 erläutern wir, bezüglich

4. *Simplified Group Activity Selection*

allerdings hängen die Präferenzen der Agenten in GASP nicht nur von den Aktivitäten alleine ab, sondern beziehen auch die Anzahl der Teilnehmer an einer Aktivität mit ein. Sowohl in s-GASP wie auch in GASP ist die Grundherausforderung, „gute“ Lösungen zu finden, wobei wir erst spezifizieren müssen, welche Charakteristika „gute“ Lösungen ausmachen. Die Grundidee von s-GASP ist es, einfache (effizient lösbare) Varianten des allgemeinen Problems zu identifizieren, die aber gleichzeitig viele Probleme der realen Welt abbilden. In der hier vorliegenden Diskussion sollen erstens die verschiedenen Lösungskonzepte für s-GASP-Probleme verständlich aufgearbeitet werden und zweitens eine Einsicht in die Ergebnisse und die verwendeten Methoden der Komplexitätsanalyse gegeben werden. Der Fokus dieser Diskussion liegt dabei auf Ersterem.

Der Rest dieses Kapitels ist wie folgt organisiert. In Abschnitt 4.1 führen wir das Modell s-GASP ein, den betrachteten Lösungskonzepten widmen wir dabei eine erhöhte Aufmerksamkeit. Verwandte Werke und zu s-GASP vergleichbare Sozialwahlprobleme diskutieren wir in Abschnitt 4.2. Ausgewählte Ergebnisse und Beweise unserer Komplexitätsanalysen betrachten wir in Abschnitt 4.3. Die Unterschiede zwischen den zwei Publikationen (Darmann et al. [22] und Darmann et al. [23]) werden in Abschnitt 4.4 erläutert. Dem Spannungsverhältnis zwischen „Fairness“ und „Effizienz“ im Kontext von s-GASP widmen wir uns in Abschnitt 4.5. Das Kapitel wird mit einem Fazit und Ausblick in Abschnitt 4.6 abgeschlossen.

Der Beginn des Abschnittes 4.1 ist eng an die entsprechenden Abschnitte der Publikationen angelegt, die folgenden Erläuterungen zu den Lösungskonzepten sind jedoch deutlich ausführlicher. Der Abschnitt 4.2 beruht auf dem Abschnitt *Related Work* der Publikation Darmann et al. [23], wir gehen hier aber teilweise mehr ins Detail. Neu ist auch die systematische Übersicht von verwandten Modellen der Sozialwahltheorie in Tabelle 4.1. Die Ergebnisse sowie Beweise in Abschnitt 4.3 stammen aus der Publikation Darmann et al. [23]; hier präsentieren wir eine übersichtliche Auswahl, anhand derer Übergangsstellen bezüglich der Komplexität im Modell herausgearbeitet werden. Die Erläuterung der Unterschiede zwischen den beiden Publikationen in Abschnitt 4.4 wurde extra für diese Diskussion geschrieben. Abschnitt 4.5 ist eine etwas ausführlichere Version des Abschnitts 4 (*Envy-Freeness versus Pareto Optimality*) in der Publikation Darmann et al. [23]. Abschnitt 4.6 ist eine ausführlichere und aktualisierte Version der *Conclusion* aus der Publikation Darmann et al. [23].

welcher Fragestellungen s-GASP ein Spezialfall von GASP ist bzw. warum es im Allgemeinen nicht als Spezialfall angesehen werden kann.

4.1. Das Modell

Eine Instanz (N, A, P, R) von s-GASP setzt sich zusammen aus der Agentenmenge $N = \{1, \dots, n\}$, den Aktivitäten A , dem Präferenzprofil P und den Restriktionen R . Hierbei ist $A = A^* \cup \{a_\emptyset\}$ mit den *echten* Aktivitäten $A^* = \{a_1, \dots, a_m\}$ und der *Nullaktivität* a_\emptyset (Agenten, die der Nullaktivität zugeordnet werden, nehmen an keiner echten Aktivität teil). Das Präferenzprofil $P = \langle \succsim_1, \dots, \succsim_n \rangle$ besteht aus n Präferenzen (eine für jeden Agenten), wobei \succsim_i eine schwache lineare Ordnung über A für jedes $i \in N$ ist. Mit \sim_i wird der symmetrische Teil von \succsim_i gekennzeichnet und mit \succ_i der asymmetrische Teil. Die Restriktionen R schränken die Menge der zulässigen Lösungen ein. Wir betrachten Restriktionen, die für jede Aktivität $a \in A^*$ durch eine unterere Schranke $\ell(a)$ und eine obere Schranke $u(a)$ gegeben sind. Eine Lösung ist eine Abbildung $\pi : N \rightarrow A$ und wird als eine *Zuordnung* bezeichnet. Für eine Zuordnung π notieren wir mit $\#(\pi) = |\{i \in N : \pi(i) \neq a_\emptyset\}|$ die Anzahl an Agenten, die von π einer echten Aktivität zugeordnet werden. Für gegebenes π bezeichnen wir als *Koalition* die Menge von Agenten, die alle von π der selben Aktivität a zugeordnet werden: $\pi^a := \{i \in N : \pi(i) = a\}$. Eine Lösung π ist *zulässig*, wenn sie die Restriktionen R nicht verletzt, d. h. $|\pi^a| \in [\ell(a), u(a)] \cup \{0\}$ für alle $a \in A^*$.

Wir untersuchen verschiedene Konzepte für gute Lösungen. Diese sind motiviert durch Kriterien der Fairness, der Effizienz und der Stabilität. Aus der Sozialwahltheorie kommen die Konzepte Fairness und Effizienz. Als Form von Fairness betrachten wir die *Neidfreiheit*, dieses Konzept überträgt sich direkt aus MARA. Eine Zuordnung heißt neidfrei, falls kein Agent die Aktivität eines anderen Agenten gegenüber seiner eigenen (der er zugeordnet ist) bevorzugt. Das Effizienzprinzip der Pareto-Optimalität erfüllt eine Zuordnung, falls es keine andere Zuordnung gibt, die niemanden schlechter, aber mindestens einen Agenten besser stellt.

Als Zuordnungsproblem sind für s-GASP insbesondere Stabilitätskriterien von Interesse. Stabilitätskriterien sollen Zuordnungen charakterisieren, die immun gegenüber Abweichungen sind. Das einfachste Stabilitätskriterium ist das Konzept der *individuellen Rationalität*. Eine Zuordnung heißt individuell rational, falls kein Agent die Nullaktivität gegenüber der Aktivität bevorzugt, der er zugeordnet ist. Den Begriff *stabil* verwenden wir hier jedoch konkret für sechs andere Varianten von Stabilität. Die Definitionen unterscheiden sich anhand zweier Charakteristika möglicher Abweichungen: Wer weicht ab, und welche Abweichungen schließen wir von vornherein aus.

4. Simplified Group Activity Selection

Wir unterscheiden zunächst zwischen den zwei Oberkriterien *virtuell stabil* und *stabil*. Eine Zuordnung ist *virtuell stabil*, wenn angestrebte Abweichungen von Agenten (das heißt Wechsel zu präferierten Aktivitäten) durch die obere Schranke der präferierten Aktivität verhindert werden. Eine Zuordnung ist *stabil*, wenn solche Abweichungen zu nicht zulässigen Zuordnungen führen würden (wir beachten hier also gegenüber der virtuellen Stabilität zusätzlich noch die unteren Schranken der Aktivitäten). Innerhalb dieser Oberkriterien differenzieren wir zwischen drei Kriterien.

Eine Zuordnung ist (*virtuell*) *individuell stabil*, wenn für keinen einzelnen Agenten eine erstrebenswerte Abweichung zulässig wäre.

Sie ist (*virtuell*) *core-stabil*, wenn sich keine Koalition bilden kann, deren Mitglieder alle von einem Wechsel zu einer Aktivität profitieren würden. Da alle strikt von einer Abweichung profitieren müssten, muss die entsprechende Aktivität gegenwärtig unbenutzt oder die Nullaktivität sein.

Eine Zuordnung ist (*virtuell*) *strikt core-stabil*, wenn sich keine Koalition bilden kann, deren Mitglieder *schwach* von einem Wechsel zu einer Aktivität profitieren würden. *Schwach* soll hier bedeuten, dass mindestens ein Agent von einem Wechsel profitieren würde und gleichzeitig niemand in der Koalition schlechter gestellt würde.

Man vergleiche insbesondere die (virtuelle) individuelle Stabilität mit dem Stabilitätsbegriff im Kontext des *Stable Marriage Problems* in der Publikation von Gale und Shapley [44] (siehe Einleitung 1.1.3). Im Appendix A.3 findet sich ein Extra-Glossar für die Lösungskonzepte, hier finden sich auch die englischen Fachbegriffe. Die Abbildung 4.1 zeigt alle direkten Zusammenhänge der Lösungskonzepte.

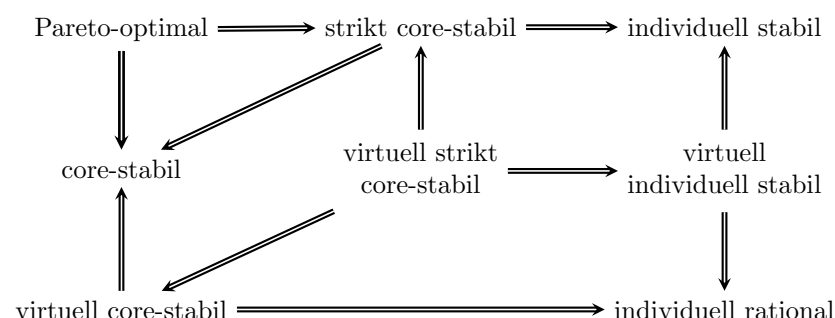


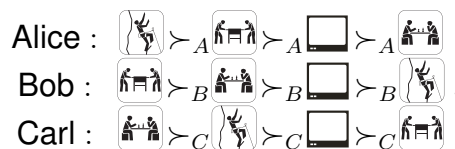
Abbildung 4.1.: Zusammenhänge der Lösungskonzepte. (Aus dem Englischen nach Darmann et al. [23])

Folgenden Abgrenzungen werden anhand der Beispiele 3 bis 7 klar:

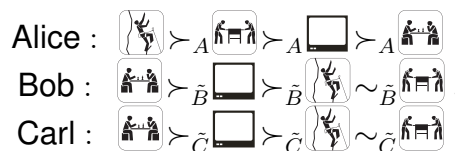
- Die virtuelle Stabilität impliziert nicht die Pareto-Optimalität oder anders herum.
- Nicht jede individuell stabile Zuordnung ist auch individuell rational.
- Die Menge der virtuell individuell stabilen Zuordnungen ist eine echte Teilmenge der Schnittmenge von individuell stabilen und individuell rationalen Zuordnungen.
- Stabilität und virtuelle Stabilität sind nicht äquivalent.

Den Unterschied zwischen Stabilität und virtueller Stabilität diskutieren wir mithilfe des Beispiels 3, bei dem wir die Bedeutung der beiden Oberkriterien anhand von Analogien zum Nachmittagsproblem (siehe Einleitung Seite 3 f.) erläutern.

Beispiel 3. Es sei $N = \{\text{Alice, Bob, Carl}\}$ und $A^* = \{\text{Klettern, Tischfußball, Schach, Fernsehen}\}$ sowie $\square = a_\emptyset$, mit $\forall x \in A^* : \ell(x) = 2$ und $u(x) = 3$. (Die Aktivitäten repräsentieren „Klettern“, „Tischfußball“, „Schach“ und „Fernsehen“.) Das Präferenzprofil sei gegeben durch:



Wir betrachten die Zuordnung π mit $\pi(\text{Klettern}) = \{\text{Alice, Carl}\}$ und $\pi(\text{Fernsehen}) = \{\text{Bob}\}$. Alice und Carl gehen also klettern und Bob bleibt daheim und schaut fern. Kein Agent kann durch einen alleinigen Aktivitätswechsel seine Situation verbessern. Allerdings könnte Bob versuchen, Carl dazu zu überreden, mit ihm Schach zu spielen und Alice daheim zu lassen, denn Carl präferiert die Aktivität Schach gegenüber der Aktivität Klettern. Allerdings verbietet die Mutter diese Änderung, da Alice durch diesen Wechsel benachteiligt würde. Sie könnte dann nicht klettern und müsste daheim bleiben. Am nächsten Wochenende hat der Vater die Aufsicht, Bob nützt dies aus und überredet Carl dazu mit ihm eine Koalition zu bilden. Sie geben beide falsche Präferenzen an, was in folgendem (manipulierten) Präferenzprofil resultiert.



Der Vater bestimmt, dass Bob und Carl Schach spielen sollen. Die Manipulation war somit erfolgreich, weswegen die Zuordnung π nicht das Kriterium der virtuellen

4. Simplified Group Activity Selection

Stabilität erfüllt. Der Unterschied zwischen stabil und virtuell stabil liegt darin, ob die Agenten aufeinander Rücksicht nehmen (müssen) oder nicht. Letzteres entspricht eher der Sichtweise der Spieltheorie, da jeder Agent versucht, seinen Nutzen ohne Rücksicht auf die anderen Agenten (bzw. auf das Gemeinwohl) zu maximieren.

Nicht jede stabile Zuordnung ist also auch virtuell stabil. Umgekehrt ist jedoch jede virtuell stabile Zuordnung auch stabil, was direkt aus der Definition abgeleitet werden kann. Weiter ist die Stabilität eine Verallgemeinerung der Pareto-Optimalität, die virtuelle Stabilität jedoch eine spezielle Form von individueller Rationalität. Etwas überraschend impliziert (virtuell) core-stabil nicht (virtuell) individuell stabil. In der Publikation *On Simplified Group Activity Selection* von Darmann et al. [22] hatten wir dies fälschlicherweise behauptet (vgl. Abbildung 1 ebenda). Ursache für diesen Irrtum sind technische Feinheiten bei der Übertragung der Stabilitätskonzepte von Hedonic Games auf GASP und von da aus auf s-GASP.³ Die Ergebnisse unserer Komplexitätsanalysen werden von diesem Irrtum nicht berührt.

Zum besseren Verständnis der Lösungskonzepte betrachten wir die Beispiele 4 bis 7 (man vergleiche hierzu auch Theorem 1 in Darmann et al. [23]). Die Hervorhebungen in den Präferenzprofilen sollen das Nachvollziehen der Beispiele erleichtern.⁴

Beispiel 4. Es sei $A^* = \{a, b\}$ und $N = \{1, 2, 3, 4\}$ mit: $\ell(a) = 1$ und $\ell(b) = 2$; $u(a) = 4$ und $u(b) = 4$. Gegeben sei das Präferenzprofil

$$\begin{array}{ll} \succsim_1: & \mathbf{a} \succ_1 b \succ_1 a_\emptyset \\ \succsim_2: & a \succ_2 \mathbf{b} \succ_2 a_\emptyset \\ \succsim_3: & \mathbf{b} \succ_3 a \succ_3 a_\emptyset \\ \succsim_4: & \mathbf{b} \succ_4 a \succ_4 a_\emptyset, \end{array}$$

In dieser Instanz sind Stabilität und virtuelle Stabilität äquivalent. Die Zuordnung π mit $\pi^a = \{1\}$ und $\pi^b = \{2, 3, 4\}$ ist nicht (virtuell) individuell stabil: die Zuordnung π_* mit $\pi_*^a = \{1, 2\}$ und $\pi_*^b = \{3, 4\}$ wird von Agent 2 gegenüber π bevorzugt. Ebenso zeigt die Zuordnung π_* auch, dass π nicht (virtuell) strikt core-stabil ist, da die Aktivität a und die Koalition $E = \{1, 2\}$ die Abweichungsbedingungen erfüllen. Die Zuordnung π ist jedoch (virtuell) core-stabil: Nur Agent 2 ist wechselwillig, er benötigt jedoch Agent 1

³Für alle *Gruppenzuordnungsprobleme* induziert eine Zuordnung π eine Koalitionsstruktur $\{\pi^a\}_{a \in A}$ der Agentenmenge. Das Prinzip des *Kerns* (engl. *core*) ist jeweils in einer direkten Beziehung zu dieser Koalitionsstruktur definiert. Unser Lösungskonzept der individuellen Stabilität nimmt auf diese Koalitionsstruktur jedoch keine Rücksicht.

⁴Für einen Agenten ist im Präferenzprofil immer die Aktivität fett hervorgehoben, zu der der Agent im jeweiligen Beispiel zugeordnet wird. So kennzeichnen wir in Beispiel 4 durch „ \mathbf{a} “ in $\succsim_1: \mathbf{a} \succ_1 b \succ_1 a_\emptyset$, dass der Agent 1 durch π der Aktivität a zugeordnet wird.

4.2. Verwandte Werke und vergleichbare Sozialwahlprobleme

um eine Koalition zu bilden, die Koalition $E = \{1, 2\}$ erfüllt jedoch nicht die Abweichungsbedingungen.

Beispiel 5. Es sei $N = \{1, 2\}$, $A^* = \{a, b\}$ mit $\forall x \in A^* : \ell(x) = 1 = u(x)$. Gegeben sei das Präferenzprofil

$$\begin{aligned} \succsim_1: & a \succ_1 b \succ_1 a_\emptyset \\ \succsim_2: & b \succ_2 a \succ_2 a_\emptyset \end{aligned} .$$

Die Zuordnung π mit $\pi(1) = b$ und $\pi(2) = a$ ist virtuell strikt core-stabil, aber nicht Pareto-optimal.

Beispiel 6. Es sei $N = \{1, 2\}$, $A^* = \{a, b\}$ mit $\forall x \in A^* : \ell(x) = 2 = u(x)$. Gegeben sei das Präferenzprofil

$$\begin{aligned} \succsim_1: & a \succ_1 a_\emptyset \succ_1 b \\ \succsim_2: & b \succ_2 a_\emptyset \succ_2 a \end{aligned} .$$

Die Zuordnung π mit $\pi^a = \{1, 2\}$ ist Pareto-optimal und individuell stabil, aber weder virtuell strikt core-stabil noch individuell rational.

Beispiel 7. Sei $N = \{1, 2, 3\}$, $A^* = \{a, b\}$ mit $\ell(a) = 1$, $u(a) = 2$ und $\ell(b) = 2 = u(b)$. Gegeben sei das Präferenzprofil

$$\begin{aligned} \succsim_1: & a \succ_1 b \succ_1 a_\emptyset \\ \succsim_2: & a \succ_2 b \succ_2 a_\emptyset \\ \succsim_3: & b \succ_3 a \succ_3 a_\emptyset \end{aligned} .$$

Die Zuordnung π mit $\pi(1) = a$ und $\pi^b = \{2, 3\}$ ist individuell stabil und individuell rational, aber nicht virtuell individuell stabil.

4.2. Verwandte Werke und vergleichbare Sozialwahlprobleme

Verwandt ist s-GASP neben GASP mit einer Reihe weiterer Sozialwahlproblemen, die man unter dem Oberbegriff *Gruppenzuordnungsprobleme* zusammenfassen kann. Die Tabelle 4.1 bietet hierzu eine Übersicht anhand der jeweiligen Präferenzen der Agenten und der Form der gesuchten Lösungen.

4. Simplified Group Activity Selection

Tabelle 4.1.: Vergleich von zu s-GASP verwandten Modellen. Die Aktivitäten (respektive Kandidaten/Ressourcen) werden mit A gekennzeichnet, die Agenten (oder Wähler) mit \mathcal{N} . (Eigene Darstellung basierend auf Vorarbeiten von Jérôme Lang)

Sozialwahlproblem	Präferenzen von Agent i über	gesuchte Lösungen (π)
Hedonic Games	$2^{\mathcal{N} \setminus \{i\}}$	Partition π von \mathcal{N}
Anonymous HG	$ \mathcal{N} $	Partition π von \mathcal{N}
GASP	$A \times \mathcal{N} $	$\pi: \mathcal{N} \rightarrow A$
s-GASP	A	$\pi: \mathcal{N} \rightarrow A$
Single-Winner Voting	A	$\pi \in A$
Multi-Winner Voting	A	$\pi \subseteq A$
Ressource Allokation	2^A	$\pi: A \rightarrow \mathcal{N}$
one-sided Matching	A	$\pi: \mathcal{N} \rightarrow A$
two-sided Matching	\mathcal{N}	$\pi: \text{Matching über } \mathcal{N}$
Stable Marriage Problem	$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 , i \in \mathcal{N}_j$ hat Präferenzen über \mathcal{N}_{3-j} ($j = 1, 2$)	$\pi: \mathcal{N}_1 \xleftrightarrow{1:1} \mathcal{N}_2$

Eine Übersicht zu *Hedonic Games* findet sich im Übersichtsartikel von Aziz und Savani [8]. Ballester [9] gibt eine Komplexitätsanalyse für die Suche nach stabilen Lösungen für *Hedonic Games*. Das ursprüngliche *Group Activity Selection Problem* (GASP) wurde von Darmann et al. [20] eingeführt; speziell wurde hier für binäre⁵ Szenarien die Komplexität der Bestimmung stabiler und maximaler individuell rationaler Lösungen untersucht. Darmann et al. [21] untersuchten für ordinale Präferenzen in GASP die Komplexität der Bestimmung stabiler Lösungen. Von Igarashi et al. [48] wurde diese Fragestellung auf sozialen Netzwerken untersucht. Hier sind die Agenten auf einem Graphen platziert und Aktivitäten müssen zusammenhängenden Komponenten des Graphen zugeordnet werden. Verwandt zu den *Gruppenzuordnungsproblemen* ist *Multi-Winner Voting*. Hier geht es darum, eine Teilmenge der Alternativen auszuwählen, sodass möglichst alle Agenten durch eine Alternative repräsentiert werden. Relevante Werke stammen von Skowron et al. [74], Monroe [59] sowie Chamberlin und Courant [17]. Das Thema Matching im Kontext der Sozialwahltheorie wird ausführlich im Artikel von Klaus et al. [51] erläutert. Das sogenannte *Stable Marriage Problem* (Gale und Shapley [44]), als wichtigen Spezialfall von two-sided Matching, haben wir bereits in der Einleitung (Abschnitt 1.1.3) beschrieben. Eine enge Verbin-

⁵Die Alternativen fallen in die zwei Äquivalenzklassen „akzeptabel“ und „nicht akzeptabel“.

4.3. Übersicht über die Ergebnisse der Komplexitätsanalysen

zung zu s-GASP haben Arbeiten, die sich mit *one-sided Matching*⁶ befassen. Dies betrifft vor allem Modelle, die sich mit *Course Allocation* und *Project Assignment* beschäftigen. Im Course-Allocation-Modell haben Studenten Präferenzen in Form strikt linearer Ordnungen über die angebotenen Kurse, welche nur für bestimmte Teilnehmerzahlen zustande kommen können. Cechlárová und Fleiner [15] lassen in diesem Kontext Mehrfachzuordnungen eines Agenten zu. Wir behandeln in s-GASP nur einfache Zuordnungen der Agenten (Studenten zu Projekten), ebenso Kaymiyama [50] und Monte und Tumennasan [60]. Alle genannten Arbeiten unterscheiden sich von unseren dadurch, dass wir eine externe Alternative (die Nullaktivität) ins Modell integrieren und die Präferenzen nicht auf strikt lineare Ordnungen einschränken (d. h. insbesondere bedenken wir auch schwach lineare Ordnungen). Insbesondere impliziert die Pareto-Optimalität bei Cechlárová und Fleiner [15] nicht die individuelle Rationalität in unserem Modell. Unser Ergebnis für MAXASSIGNMENT bei Pareto-Optimalität ist also nicht durch deren Theorem zu maximal Pareto-optimalen Zuordnungen abgedeckt. Eine große inhaltliche Nähe unserer Arbeiten gibt es zur Publikation von Arulsevan et al. [6]. Das von ihnen betrachtete Problem MAXIMUM WEIGHT MANY-TO-ONE MATCHING WITH LOWER AND UPPER QUOTAS verallgemeinert unsere Fragestellung nach maximal individuell rationalen Zuordnungen. Insbesondere ist ein Teil unserer Resultate über maximal individuell rationale Zuordnungen bereits durch ihre Ergebnisse abgedeckt.⁷ Eine weiterführende Übersicht bezüglich GASP und verwandter Probleme findet sich im Buchkapitel von Darmann und Lang [24].

4.3. Übersicht über die Ergebnisse der Komplexitätsanalysen

Für alle Lösungskonzepte führen wir den Begriff der *Maximalität* ein: So ist eine Zuordnung *maximal individuell rational*, falls es keine andere individuell rationale Zuordnung gibt, die mehr Agenten einer echten Aktivität zuordnet. Analog sind maximal neidfreie, maximal Pareto-optimale [...] Zuordnungen definiert. Für alle eingeführten Lösungskonzepte wurde die rechnerische Komplexität der zugehörigen Entscheidungsprobleme untersucht. Das Entscheidungsproblem EXISTENZ fragt, wie schwer

⁶Auch *many-one Matching* genannt

⁷Konkret impliziert das Theorem 3 von Arulsevan et al. [6] das Theorem 9 in der Publikation von Darmann et al. [21] und in Folge dessen auch die Korollare 10 und 11.

4. Simplified Group Activity Selection

es ist, Zuordnungen zu finden, die ein vorgegebenes Lösungskonzept erfüllen. Das weitergehende Entscheidungsproblem **MAXASSIGNMENT** fragt, wie schwer es ist, Zuordnungen zu finden, die ein vorgegebenes Lösungskonzept erfüllen und mehr als eine vorgegebene Schranke $k \in \mathbb{N}$ Agenten einer echten Aktivität zuordnen. Wir unterscheiden dabei drei Fälle: den allgemeinen Fall, bei dem wir beliebige untere und obere Schranken für die Aktivitäten zulassen; den Fall ohne obere Schranken für die Teilnehmerzahlen (d. h. Instanzen von s-GASP mit $u(a) = |\mathcal{N}|$ für alle Aktivitäten a); und zuletzt den Fall ohne untere Schranken (d. h. Instanzen von s-GASP mit $\ell(a) = 1$ für alle Aktivitäten a). Eine vollständige Übersicht der Ergebnisse bietet Tabelle 1 in unserer zweiten Publikation (Darmann et al. [23]). Wir präsentieren hier in Tabelle 4.2 ausgewählte Ergebnisse.

Tabelle 4.2.: Übersicht über ausgewählte Ergebnisse der Komplexitätsanalysen. Lösungskonzepte (L.-k.): **z** zulässig, **ir** individuell rational, **nf** neidfrei, **vis** virtuell individuell stabil, **vcs** virtuell core-stabil, **vscs** virtuell strikt core-stabil, **po** Pareto-optimal. Komplexitätsklassen: In Polynomialzeit lösbar (in P), NP-vollständig (NP-v), NP-schwer (NP-s). Interessant sind die Übergangsstellen der Komplexität. In Unterabschnitt 4.3.1 betrachten wir die durch die Pfeile gekennzeichneten Übergänge. (In Anlehnung an Darmann et al. [23])

EXISTENZ				MAXASSIGNMENT			
L.-k.	allgemein	$u(a) = n$	$\ell(a) = 1$	L.-k.	allgemein	$u(a) = n$	$\ell(a) = 1$
z	in P	in P	in P	z	in P	in P	in P
nf	in P	in P	in P	ir	NP-v	NP-v	← in P
ef	in P	in P	in P	nf	NP-v	in P	?
vis	in P	in P	in P	vis	in P	in P	in P
vcs	NP-v	NP-v	in P	vcs	NP-v	NP-v	in P
vscs	NP-v	NP-v	in P	vscs	NP-v	NP-v	in P
po	NP-s	NP-s	in P	po	NP-s	?	in P

a) Existiert eine Zuordnung π , die die geforderte Eigenschaft erfüllt?

b) Existiert eine entsprechende Zuordnung π , für die $\#(\pi) \geq k$ ($k \in \mathbb{N}$) gilt?

Die Existenz von zulässigen und sogar neidfreien sowie individuell rationalen Zuordnungen ist durch die triviale Zuordnung (die alle Agenten der Nullaktivität zuordnet) erfüllt. Für Instanzen ohne Beschränkungen der Teilnehmerzahlen nach unten (also $\ell(a) = 1$ für alle a) gilt mit der Ausnahme der Neidfreiheit, dass für alle Lösungs-

konzepte sowohl EXISTENZ als auch MAXASSIGNMENT in Polynomialzeit lösbar sind. Dies lässt sich durch Reduktionen auf das Problem MAX INTEGER FLOW WITH UPPER BOUNDS (MAXFLOW) (A.1.1: Problem 5) zeigen. Exemplarisch dafür steht der Beweis von Theorem 6. Für Neidfreiheit ist die Frage nach der Komplexität von MAXASSIGNMENT in diesem Fall noch ungeklärt.

4.3.1. Übergangsstellen der Komplexität

Von besonderem Interesse sind die Übergangsstellen zwischen in Polynomialzeit lösbaren und NP-vollständigen Problemen. So ist EXISTENZ für virtuell core-stabile Zuordnungen im Allgemeinen ein NP-vollständiges Problem (Theorem 5), für virtuell individuell stabile Zuordnungen jedoch in Polynomialzeit lösbar (Theorem 4). Das Problem MAXASSIGNMENT ist im Allgemeinen für individuell rationale Zuordnungen NP-vollständig (Theorem 7), eingeschränkt auf Instanzen mit $\ell(a) = 1$ für alle $a \in A^*$ liegt es in P (Theorem 6). Beide Übergänge sind in Tabelle 4.2 durch Pfeile gekennzeichnet. Wir zeigen anhand der vier entsprechenden Theoreme auch die verwendeten mathematischen Methoden auf. Die hier beschriebenen Beweise stellen die einfacheren und direkteren Beweise der Publikationen dar. Ein gutes Verständnis dieser „einfacheren“ Beweise dient aber dem Nachvollziehen der „schwierigeren“ Beweise in den Publikationen.

Theorem 4 (Theorem 3 [23]). *Eine virtuell individuell stabile Zuordnung existiert immer und kann in Polynomialzeit gefunden werden.*

Beweisskizze. Solche Zuordnungen können durch einen einfachen „gierigen Algorithmus“ (engl. *greedy algorithm*) gefunden werden. In einer Instanz (N, A, P, R) von s-GASP ordnen wir initial jeden Agenten der Nullaktivität zu und ersetzen A durch $A^* = \{a \in A : \ell(a) = 1\}$. Anschließend ordnen wir nacheinander jeden Agenten i einer passenden Aktivität aus A^* zu. Hierzu bestimmen wir in jedem Schritt die Teilmenge A_i^* der Aktivitäten in A^* , für die die jeweiligen oberen Schranken noch nicht „ausgeschöpft“ sind. Den jeweiligen Agenten ordnen wir nun seiner am höchsten präferierten Aktivität a aus A_i^* zu. Es ist leicht zu sehen, dass die resultierende Zuordnung virtuell individuell stabil ist. \square

Wie wir schon in Beispiel 3 gesehen haben, muss eine virtuell (strikte) core-stabile Zuordnung nicht immer existieren. Darüber hinaus ist es auch ein NP-vollständiges Problem zu entscheiden, ob in einem Szenario solche Zuordnungen möglich sind.

4. Simplified Group Activity Selection

Theorem 5 (Theorem 4 und Korollar 5 [23]). *Die Entscheidung, ob eine virtuell (strikt) core-stabile Zuordnung existiert, ist NP-vollständig, selbst dann, wenn für jede Aktivität $a \in A^*$ gilt, dass $u(a) = n$.*

Der Beweis erfolgt durch eine Reduktion vom NP-vollständigen Problem EXACT COVER BY 3-SETS (X3C) (A.1.1: Problem 4), die eine Querverbindung zu Beispiel 3 und somit auch zum Condorcet-Paradoxon benutzt. In den entsprechenden Instanzen ist virtuell core-stabil deckungsgleich mit virtuell strikt core-stabil. In der Beweisskizze von Theorem 7 zeigen wir eine exemplarische Reduktion von X3C auf eine s-GASP-Instanz.

Theorem 6 (Theorem 8 [23]). *Falls für jede Aktivität $a \in A^*$ gilt, dass $\ell(a) = 1$, dann kann in Polynomialzeit eine maximal individuell rationale Lösung gefunden werden.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch eine Reduktion auf das (in Polynomialzeit lösbare) Problem MAXFLOW (A.1.1: Problem 5). Gegeben sei eine Instanz $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ von s-GASP mit $\ell(a) = 1$ für alle $a \in A^*$. Wir konstruieren nun eine Instanz von MAXFLOW. Diese Konstruktion wird auch in Abbildung 4.2 dargestellt. Die Knotenmenge des Netzwerks setzt sich zusammen aus dem Startknoten s , dem Zielknoten t , der Menge der Agenten N und der Menge der echten Aktivitäten A^* . Die Kantenmenge und die Kapazitäten der Knoten konstruieren sich wie folgt:

- Für jedes $i \in N$ wird die Kante (s, i) mit der Kapazität 1 erstellt;
- Für jedes $a \in A^*$ und $i \in N$ mit $a \succsim_i a_\emptyset$ wird die Kante (i, a) mit der Kapazität 1 erstellt;
- Für jedes $a \in A^*$ wird die Kante (a, t) mit der Kapazität $u(a)$ erstellt.

Es verifiziert sich direkt, dass eine maximal individuell rationale Zuordnung einem maximalen Fluss entspricht und umgekehrt. \square

Theorem 7 (Theorem 7 [23]). *Das Entscheidungsproblem, ob es eine individuell rationale Zuordnung gibt, die jeden Agenten einer echten Aktivität zuordnet, ist ein NP-vollständiges Problem, selbst wenn $u(a) = n$ für alle $a \in A^*$ gilt.*

Beweisskizze. Der Beweis erfolgt durch Reduktion vom NP-vollständigen Problem X3C (A.1.1: Problem 4), mit der Restriktion auf Instanzen $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$, in denen jedes X in genau drei Mengen \mathcal{Z} enthalten ist. Sei $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ eine solche X3C-Instanz

4.4. Zusammenhänge und Unterschiede zwischen den Publikationen

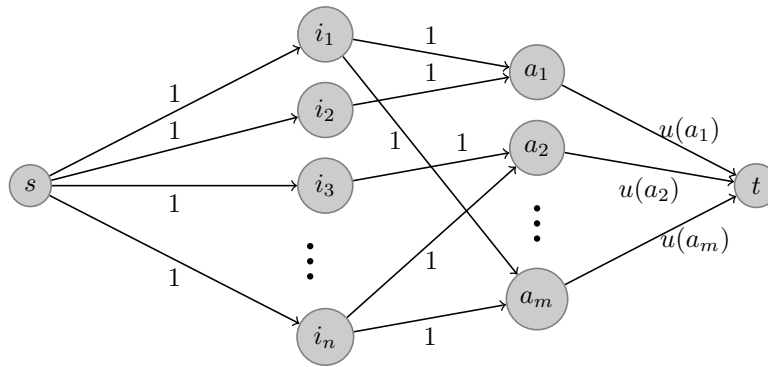


Abbildung 4.2.: Exemplarisches Flussdiagramm, das dem MAXASSIGNMENT Problem für individuell rationale Zuordnungen entspricht. Diese Abbildung visualisiert die Konstruktion im Beweis von Theorem 6. (Eigene Darstellung)

(mit $X = \{1, \dots, 3q\}$, $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_p\}$ und $p = 3q$). Wir kennzeichnen die drei Mengen, die $i \in X$ enthalten, mit $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}$, wobei $i_1 < i_2 < i_3$ gelte. Nun konstruieren wir eine Instanz von s-GASP (N, A, P, R) , sodass wir Folgendes erhalten:

- $N = X$, $A = A^* \cup \{a_\emptyset\}$ mit $A^* = \{a_1, \dots, a_p\}$,
- das Präferenzprofil $P = \langle \succsim_i \rangle$ gegeben durch $a_{i_1} \succsim_i a_{Z_{i_2}} \succsim_i a_{i_3} \succsim_i a_\emptyset \succsim_i \dots$ und
- die Restriktionen R gegeben durch $|\pi^a| \in \{0\} \cup \{3, \dots, n\}$ für alle $a \in A^*$.

Diese Reduktion ist polynomiell und die Korrespondenz zwischen Lösungen für die X3C-Instanz und individuell rationalen Zuordnungen für die GASP-Instanz (N, A, P, R) ist direkt ersichtlich. (Man beachte hier wieder die Querverbindung zu Beispiel 3 und dem Condorcet-Paradoxon). \square

4.4. Zusammenhänge und Unterschiede zwischen den beiden Publikationen

Die Publikation *Simplified Group Activity Selection* von Darmann et al. [23] ist eine logische Fortführung der Publikation *On Simplified Group Activity Selection* von Darmann et al. [22]. In *Simplified Group Activity Selection* [23] haben wir den Fehler bezüglich der Zusammenhänge der verschiedenen Stabilitätskriterien aufgedeckt und die Abgrenzungen der Lösungskonzepte anhand einiger Beispiele herausgearbeitet.

4. Simplified Group Activity Selection

Weiter haben wir einige der aus Platzgründen in *On Simplified Group Activity Selection* [22] nicht oder nur gekürzt ausgeführten Beweise aufgenommen. Bezüglich der Komplexitätsanalyse konnten wir einige offene Fragestellungen klären:

- Für Pareto-optimale Lösungen im Allgemeinen ist das Entscheidungsproblem EXISTENZ NP-schwer (vgl. Theorem 17 [23]), dies gilt auch für den eingeschränkten Fall mit $u(a) = n$ für alle $a \in A^*$.
- Für Pareto-optimale Lösungen im Allgemeinen ist das Entscheidungsproblem MAXASSIGNMENT NP-schwer (vgl. Theorem 20 [23]).
- Für strikt core-stabile Lösungen im Allgemeinen ist das Entscheidungsproblem MAXASSIGNMENT NP-vollständig (vgl. Theorem 15 [23]), dies gilt auch für den eingeschränkten Fall mit $u(a) = n$ für alle $a \in A^*$.

Man vergleiche hierzu die Tabelle 1 in *On Simplified Group Activity Selection* [22] und Tabelle 1 in *Simplified Group Activity Selection* [23]. Man beachte insbesondere, dass wir in den Theoremen 17 und 20 (Publikation [23]) nur die NP-Schwere der entsprechenden Entscheidungsprobleme nachweisen. Die Frage, ob diese Entscheidungsprobleme in NP liegen, ist also noch nicht beantwortet.

Als neue Fragestellung betrachteten wir in Abschnitt 3.2.1 von *Simplified Group Activity Selection* [23] Instanzen, bei denen die Restriktionen dadurch gegeben sind, dass ausgewogene Zuordnungen gefordert werden, d. h. für jedes a gilt $\ell(a) = u(a) = q$ für ein festes $q \in \mathbb{N}$. Wir können zeigen, dass EXISTENZ für individuell rationale Zuordnungen für $q \geq 3$ ein NP-vollständiges Problem ist, für $q \in \{1, 2\}$ jedoch in Polynomialzeit lösbar ist. Letzteres Resultat lässt sich auf Instanzen übertragen, bei denen $1 \leq \ell(a) \leq u(a) \leq 2$ gilt. Die Polynomialzeitergebnisse sind zwar bereits von der Publikation von Arulsevan et al. [6] abgedeckt, allerdings können wir unsere Beweistechnik⁸ auch auf die Fragestellung nach Pareto-optimale Zuordnungen anwenden. Die entsprechenden Resultate sind zur Veröffentlichung in einer Journalversion des Projektes vorgesehen.

⁸Unsere Beweise beruhen auf einer cleveren Konstruktion, durch die sich die jeweiligen Probleme auf MAXIMUM MATCHING reduzieren, siehe den Beweis von Theorem 9 in *Simplified Group Activity Selection* [23].

4.5. Fairness vs. Effizienz

Bei vielen Sozialwahlproblemen gibt es ein Spannungsverhältnis zwischen Fairness und Effizienz. Dies trifft auch auf das Simplified Group Activity Selection Problem zu: Wie das folgende Beispiel 8 zeigt, gibt es im Allgemeinen keine Zuordnungen, die sowohl neidfrei als auch Pareto-optimal sind.

Beispiel 8. Gegeben seien $N = \{1, 2\}$ und $A^* = \{a\}$ mit den Restriktionen $\ell(a) = 1$ und $u(a) = 1$ sowie das Präferenzprofil $P = \{\succsim_1, \succsim_2\}$, sodass $a \succ_1 a_\emptyset$ und $a \succ_2 a_\emptyset$. Die Pareto-optimalen Zuordnungen sind genau die beiden, welche genau einen Agenten der Aktivität a zuordnen. Diese Zuordnungen sind jedoch nicht neidfrei.

Interessanterweise gilt dieses Spannungsverhältnis immer noch, wenn für alle Aktivitäten die Teilnehmerzahlen nicht nach oben beschränkt sind und es Pareto-optimale Zuordnungen gibt, die alle Agenten einer echten Aktivität zuordnen. Das Fehlen einer oberen Schranke macht die Existenz von maximal neidfreien Zuordnungen trivial. Deswegen ist das Fortbestehen dieses Spannungsverhältnisses nicht im Vorhinein klar. Das kleinste bekannte Gegenbeispiel ist in Beispiel 9 aufgeführt.

Beispiel 9. Gegeben seien $N = \{1, 2, 3\}$ und $A^* = \{a, b, c\}$ mit den Restriktionen $\ell(x) = 3$ und $u(x) = 6$ für alle $x \in A^*$. Das Präferenzprofil sei gegeben durch

$$\begin{array}{ll} \succsim_1: & a \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 a_\emptyset & \succsim_4: & a \succ_4 b \succ_4 c \succ_4 a_\emptyset \\ \succsim_2: & b \succ_2 c \succ_2 a \succ_2 a_\emptyset & \succsim_5: & b \succ_5 c \succ_5 a \succ_5 a_\emptyset . \\ \succsim_3: & c \succ_3 a \succ_3 b \succ_3 a_\emptyset & \succsim_6: & c \succ_6 a \succ_6 b \succ_6 a_\emptyset \end{array}$$

Durch die gegebenen Restriktionen gibt es nur vier Typen von Zuordnungen,

- (i) Es sind drei bis fünf Agenten derselben Aktivität $x \neq a_\emptyset$ zugeordnet und die restlichen Agenten der Nullaktivität (neidfrei, aber nicht Pareto-optimal, vgl. Typ *iii*).
- (ii) Alle Agenten sind der Nullaktivität zugeordnet (nicht Pareto-optimal, vgl. Typ *iii*).
- (iii) Alle Agenten sind derselben Aktivität $x \neq a_\emptyset$ zugeordnet (neidfrei, aber nicht Pareto-optimal, vgl. Typ *iv*).
- (iv) Drei der Agenten sind derselben Aktivität $x \neq a_\emptyset$ zugeordnet und die anderen drei einer anderen Aktivität $y \notin \{x, a_\emptyset\}$ (Pareto-optimal, aber nicht neidfrei).

Keine Allokation vom Typ *iv* kann neidfrei sein, da wir drei Paare von Agenten mit jeweils identischen Präferenzen haben (Agent 1 und 4, Agent 2 und 5 sowie Agent 3

4. Simplified Group Activity Selection

und 6) und mindestens eines dieser Paare durch eine Allokation von Typ *iv* nicht derselben Aktivität zugeordnet werden kann. Somit gibt es in diesem Beispiel keine Zuordnung, die sowohl neidfrei als auch Pareto-optimal ist. Man beachte insbesondere die Querverbindung zum Condorcet-Paradoxon.

4.6. Fazit und Ausblick

Wir haben eine vereinfachte Variante des Group Activity Selection Problem (GASP) eingeführt, mit der eine Vielzahl von Anwendungen beschrieben werden kann. Wir haben unterschiedliche Lösungskonzepte, motiviert von Konzepten aus der Sozialwahl-, Wirtschafts- und Spieltheorie, eingeführt und die Zusammenhänge zwischen den Lösungskonzepten erläutert. Wir haben eine einfache Klasse von Restriktionen eingeführt und eine ausführliche Komplexitätsanalyse der beiden Entscheidungsprobleme EXISTENZ und MAXASSIGNMENT unter Beachtung dieser Restriktionen eingeführt. Für zukünftige Arbeiten schlagen wir folgende Forschungsfragen vor:

1. Besonders aus der Sicht möglicher Anwendungen wäre eine parametrisierte Komplexitätsanalyse (wie etwa in der Arbeit *Tool Auctions* [25]) von Interesse. Als relevante Parameter kommen in Frage: Anzahl der einer echten Aktivität zugeordneten Agenten; Anzahl an stattfindenden Aktivitäten; Anzahl an Aktivitäten, die von mindestens einem Agenten gegenüber der Nullaktivität bevorzugt werden; Anzahl verschiedener „Typen“ von Agenten, wobei Agenten desselben Typs identische Präferenzen haben.
2. Von Relevanz wären weitere Klassen von Restriktionen. Diese könnten z. B. ein Kostenbudget aufseiten der Aktivitäten oder eine notwendige Ausgewogenheit der Teilnehmerzahlen modellieren. Hierbei haben wir eine andere Form von Ausgewogenheit als in der Publikation *Simplified Group Activity Selection* [23] im Blick. Die Teilnehmerzahlen der Aktivitäten sollten ungefähr (± 1) dieselben sein, die genaue Anzahl wäre aber nicht von vornherein festgelegt. Dies würde einen Bogen zu den erwähnten Arbeiten⁹ über *Multi-Winner Voting* spannen.
3. Aufbauend auf vorherigem Punkt ist es ein weiteres spannendes Ziel, Familien von Restriktionen zu charakterisieren, die die Existenz „guter“ Lösungen garantieren oder ausschließen.

⁹(Skowron et al. [74], Monroe [59] sowie Chamberlin und Courant [17])

5. Tool Auctions

Wir beginnen dieses Kapitel mit einem kleinen Ausflug in die Fantasyliteratur. Die „Scheibenwelt“ von Terry Pratchett wird von den verschiedensten Spezies besiedelt, unter anderem von den Zwergen. Diese sind arbeitsam und technisch versiert, weswegen sie auch die besten und innovativsten Handwerker stellen. Im Roman *Die volle Wahrheit: Ein Scheibenwelt-Roman* von Pratchett [64] beobachtet eine Protagonistin Zwerge beim Arbeiten und kommt zu einer interessanten Erkenntnis:

„Sacharissa gewann den Eindruck, dass ein Zwerg nur zwei Werkzeuge brauchte: seine Axt und etwas, um Feuer zu machen. Auf diese Weise bekam er die Möglichkeit, sich früher oder später eine Schmiede einzurichten, in der er einfache Werkzeuge herstellen konnte, womit er wiederum komplexere Werkzeuge produzierte, und wenn einem Zwerg *komplexe* Werkzeuge zur Verfügung standen, waren ihm überhaupt keine Grenzen mehr gesetzt.“

— Terry Pratchett (2000, dt. 2001), *Die volle Wahrheit: Ein Scheibenwelt-Roman*

Dieses Zitat passt überraschend gut zum Projekt *Tool Auctions*, aus dem die gleichnamige Publikation von Döcker et al. [25] entstand. In diesem Projekt beschäftigen wir uns mit einer Variante kombinatorischer Auktionen, dem Modell *Mixed Multiunit Combinatorial Auction* (MMUCA), das von Cerquides et al. [16] eingeführt wurde. Bei einer kombinatorischen Auktion geben Bieter Gebote auf Kombinationen von Gütern ab und der Auktionator muss entscheiden, welche der Gebote er unter dem Gesichtspunkt der Gewinnmaximierung annimmt.

In MMUCA geben die Bieter ihre Gebote nicht auf Bündel von Gütern, sondern auf Transformationen von Bündeln, d. h. formal Paare von Bündeln, ab. Mithilfe dieser Variante lassen sich Probleme modellieren, die nicht nur Charakteristika von Auktionen erfüllen, sondern auch Merkmale von „*Lieferkettenmanagement*“ (engl. *supply chain management*) besitzen. In *Tool Auctions* betrachten wir eine eingeschränkte Klasse von Transformationen, die sich dadurch auszeichnen, dass jeweils ein Gut als *Werkzeug* (engl. *tool*) für die jeweilige Transformation dient, d. h. in beiden

5. Tool Auctions

Bündeln der Transformation vorkommt. Das *Werkzeug-Gut* ist für die Transformation essentiell, wird dabei aber nicht verbraucht. Ein Beispiel ist das Gut *Axt* für die Transformation des Gutes *Holz* in das Gut *Feuerholz*. Wir benutzen die Notation $\{Axt, Holz\} \mapsto \{Axt, Feuerholz\}$, um eine solche Transformation zu beschreiben.

Begleiten wir einen Zwerg auf dem Weg zu seinen komplexen Werkzeugen. Ausgestattet mit einer Axt, muss er zuerst einfachere Werkzeuge herstellen. Zum Beispiel aus Holz und Eisen mithilfe der Axt einen Hammer: $\{Axt, Holz, Eisen\} \mapsto \{Axt, Hammer\}$. Unter der Annahme, dass Holz und Eisen in großer Menge vorhanden sind, braucht er diese Güter nicht in seine Überlegungen miteinzubeziehen: $\{Axt\} \mapsto \{Axt, Hammer\}$. Hier produziert er also ein neues Objekt und verbraucht dabei als einzige Ressource Arbeitszeit, oder, etwas vereinfacht, einen (diskreten) Arbeitsschritt. Bei einem Arbeitsschritt könnte (als Nebeneffekt) auch mehr als ein Objekt geschaffen werden: $\{Axt\} \mapsto \{Axt, Werkbank, Feuerholz\}$. Anders sieht es aus, wenn anstatt Holz und Eisen ein knappes Gut¹ verwenden muss: $\{Hammer, Gold\} \mapsto \{Hammer, Schmuckstück\}$. Wichtig ist auch, dass wir Güter nicht grundsätzlich in „Werkzeug-Güter“ oder „Nicht-Werkzeug-Güter“ aufteilen. So kann das Gut *Axt* sowohl Werkzeug einer Transformation sein als auch in einer Transformation verbraucht werden oder durch diese entstehen, wie die drei folgenden Beispieltransformationen es zeigen.

- $\{Axt\} \mapsto \{Axt, Hammer\}$
- $\{Schmiede, Axt\} \mapsto \{Schmiede, Streitaxt\}$
- $\{Schmiede\} \mapsto \{Schmiede, Axt\}$

Will der Zwerg in möglichst wenigen Arbeitsschritten seine Zielobjekte (komplexe Werkzeuge) erstellen, ist er mit einem kombinatorischen Optimierungsproblem konfrontiert. Er ist ausgestattet mit Startgütern und verfügt über eine gewisse Anzahl von Transformationen; seine Aufgabe ist nun, seine Zielgüter in möglichst wenigen Arbeitsschritten zu erreichen, bzw. er muss erkennen, ob es mit den zur Verfügung stehenden Startgütern und Transformationen überhaupt möglich ist, seine Zielobjekte zu erreichen. Er muss nun entscheiden, welche Transformationen er verwendet und in welcher Reihenfolge er dies tut. Er muss beachten, dass Güter nicht zu früh von einer Transformation verbraucht werden, falls er sie auch für andere Transformationen benötigt. Auch könnte eine geschickte Wahl der Transformationen zu Synergien führen.

¹Man vergleiche die Definition knapper Güter nach dem Gabler Wirtschaftslexikon [42]: „wirtschaftliches Gut, Wirtschaftsgut; Gut, das nicht zu jeder Zeit und an jedem gewünschten Ort in der gewünschten Qualität und Menge zur Verfügung steht (verfügbare Gütermenge < Bedarfsmenge).“

Diese beiden Aufgaben für den Zwerg entsprechen den zwei zentralen Entscheidungsproblemen in MMUCA. Das Entscheidungsproblem der *Machbarkeit* (FEASIBILITY) fragt, ob für eine gegebene Auktionsinstanz überhaupt eine zulässige Lösung existiert. Die weitergehende Frage nach einer optimalen Lösung ist das Entscheidungsproblem der *Gewinnerermittlung* (WINNER DETERMINATION). In Abschnitt 5.2 führen wir die beiden Probleme formal ein. Zudem greifen wir dort in Beispiel 10 das Eingangszitat noch einmal auf, ansonsten beenden wir den Ausflug in die Fantasyliteratur.

In diesem Kapitel arbeiten wir die Motivation und die Details des Modells heraus und geben eine Übersicht über unsere detaillierte Analyse der (parametrisierten) Komplexität der zwei zentralen Entscheidungsprobleme. Die Ergebnisse betrachten wir in diesem Sinn auch im direkten Vergleich zu verwandten Werken. Meine Beiträge zum Projekt Tool Auctions betrafen in erster Linie die Entwicklung des Modells und der zugehörigen Fragestellungen. Der Hauptanteil an den Beweisen ist Ronald de Haan zuzurechnen. Deswegen gehen wir hier im Gegensatz zu den restlichen Kapiteln nicht näher auf die Beweise und die verwendeten Techniken ein.²

Der Rest dieses Kapitels ist wie folgt organisiert. Abschnitt 5.1 beginnt mit einer Erläuterung der Motivation und der wichtigsten Fragestellungen des Projektes sowie einem Kurzanriss relevanter Werke anderer Autoren. In Abschnitt 5.2 führen wir das Modell Tool Auctions ein; die Designwahlen erläutern wir in Unterabschnitt 5.2.1. Die Ergebnisse unserer Komplexitätsanalyse diskutieren wir in Abschnitt 5.3. Dieser ist in drei Unterabschnitte aufgeteilt: Unterabschnitt 5.3.1 gibt eine Übersicht über unsere Ergebnisse in klassischer Komplexitätsanalyse; den direkten Vergleich dieser Ergebnisse zu denen der Publikation von Fionda und Greco [39] ziehen wir in Unterabschnitt 5.3.2. Unsere Ergebnisse einer parametrisierten Komplexitätsanalyse des Modells diskutieren wir in Unterabschnitt 5.3.3. Das Kapitel wird mit einem Fazit und Ausblick in Abschnitt 5.4 abgeschlossen.

Abschnitt 5.1 ist insofern originär, als dass hier ein neuer Blick auf das Projektes gegeben wird, die Ausführungen stehen aber größtenteils im direkten Bezug zur Publikation. Der Inhalt von Abschnitt 5.2 ist größtenteils der Publikation entnommen, hier führen wir jedoch das Eingangsbeispiel weiter aus und erläutern die für den Unterabschnitt 5.3.2 (d. h. für den Vergleich zu anderen Werken über MMUCA) rele-

²Alleine die verwendeten (nicht trivialen) Beweistechniken lohnen jedoch einen direkten Blick in die Publikation (Döcker et al. [25]), dies gilt insbesondere aus der Perspektive der parametrisierten Komplexitätstheorie. Besondere Beachtung verdienen die Verwendung des Problems MULTICOLOURED CLIQUE (vgl. Fellows et al. [38]) und die Anwendung von dynamischer Programmierung.

5. Tool Auctions

vanten Designwahlen ausführlicher. In Abschnitt 5.3 sind die Unterabschnitte 5.3.1 und 5.3.3, in denen wir unsere Ergebnisse und deren Einordnung diskutieren, inhaltlich der Publikation Döcker et al. [25] entnommen. Die Ausarbeitung des direkten Vergleiches in Unterabschnitt 5.3.2 stellt eine originäre wissenschaftliche Eigenleistung dar. Abschnitt 5.4 entspricht inhaltlich einer Kurzversion des Abschnitts *Conclusion* aus unserer Publikation Döcker et al. [25].

5.1. Hintergründe und Motivation des Modells

In MMUCA gibt es zwei zentrale Entscheidungsprobleme – FEASIBILITY und WINNER DETERMINATION (WINDET): Dabei untersucht FEASIBILITY, ob es in einem gegebenen Szenario überhaupt zulässige und zum Ziel führende Abfolgen von Transformationen (also zulässige Lösungen) gibt; WINDET beantwortet die Frage, ob zulässige Lösungen, in denen eine vorgegebene Anzahl von Transformationen nicht überschritten wird, existieren. Beide Probleme sind bereits unter recht starken Einschränkung NP-vollständig, insbesondere also im Allgemeinen vermutlich nicht effizient lösbar. Die Hauptmotivation hinter unserer Arbeit ist, eingeschränkte Varianten des allgemeinen Modells zu identifizieren, in denen die zugrunde liegenden Probleme sowohl effizient, das heißt in Polynomialzeit, lösbar sind als auch Bedeutung für die Praxis haben. Insbesondere letzteres ist unserer Meinung nach durch das Modell Tool Auctions gegeben. Darüber hinaus betreiben wir eine parametrisierte Komplexitätsanalyse des Modells, d. h. uns interessiert nicht nur die Frage, ob die zentralen Probleme schwierig sind, sondern auch, welche Aspekte oder Parameter die Probleme schwierig machen.

Der Abschnitt *Related Work* unserer Publikation gibt eine Übersicht über weiterführende und relevante Arbeiten. Hervorzuheben sind im Kontext unserer Arbeit zwei Publikationen. Von Cerquides et al. [16] stammt die erste Komplexitätsanalyse in MMUCA. Die Autoren zeigen insbesondere, dass das Entscheidungsproblem WINDET im Allgemeinen NP-vollständig ist. Unser Modell Tool Auctions weicht unter anderem durch die Möglichkeit der unbegrenzten Verwendung ein und derselben Transformation vom „klassischen“ MMUCA-Modell ab; diesen Unterschied diskutieren wir im Abschnitt *Designwahlen* 5.2.1. Von Fionda und Greco [39] stammt eine weitergehende Komplexitätsanalyse. Sie untersuchen beide Entscheidungsprobleme unter verschiedenen Restriktionen. Die dahinter stehende Grundmotivation ist diesel-

be wie die unsere, allerdings unterscheidet sich der gewählte Ansatz der Restriktionen grundsätzlich von unserem. Im Abschnitt 5.3.1 werden ihre und unsere Ergebnisse im direkten Vergleich diskutiert.

5.2. Tool Auctions – Das Modell

Sei G eine endliche Menge von Gütern. Ein Bündel ist eine Multimenge³ von Gütern, d. h. eine Abbildung $B: G \rightarrow \mathbb{N}_0$, hierfür schreiben wir auch $B \in \mathbb{N}_0^G$.⁴ Für jedes Gut wird also angegeben, wie oft es im entsprechenden Bündel vorkommt. Wir benutzen Tripel $t = \langle \tau, \mathcal{I}, \mathcal{O} \rangle \in G \times \mathbb{N}_0^G \times \mathbb{N}_0^G$ mit $\tau \notin \mathcal{I} \cup \mathcal{O}$ und $\mathcal{I} \cap \mathcal{O} = \emptyset$, um mögliche *Transformationen* zu beschreiben. Dabei ist τ das *Tool* („Werkzeug“), welches benötigt wird, um die Transformation durchzuführen, \mathcal{I} sind die *Input-Goods* („Eingabegüter“), und \mathcal{O} die *Output-Goods* („Produkte“) der Transformation. Wo Verwechslungen ausgeschlossen sind, verwenden wir den Ausdruck *Tool* nicht nur für τ , sondern auch für t . Hier beschränken wir uns auf drei Typen von Transformationen, die sich durch gewisse Beschränkungen für \mathcal{I} und \mathcal{O} ergeben: *Single-Output-Tools* („Einprodukt-Werkzeuge“) mit $\mathcal{I} = \emptyset$ und $|\mathcal{O}| = 1$; *Multi-Output-Tools* („Mehrprodukt-Werkzeuge“) mit $\mathcal{I} = \emptyset$; und *Tabac-Tools* („Tabac-Werkzeuge“) mit $|\mathcal{I}| = |\mathcal{O}| = 1$. Diese Transformationstypen sind in Abbildung 5.1 visualisiert. Analog zu dieser Visualisierung verwenden wir gelegentlich $t_{\tau, \mathcal{O}}^{\mathcal{I}}$ als alternative Darstellung für $\langle \tau, \mathcal{I}, \mathcal{O} \rangle$.⁵ Wir verwenden den Oberbegriff *Tool-Transformationen* für die beschriebenen drei Typen von Transformationen.

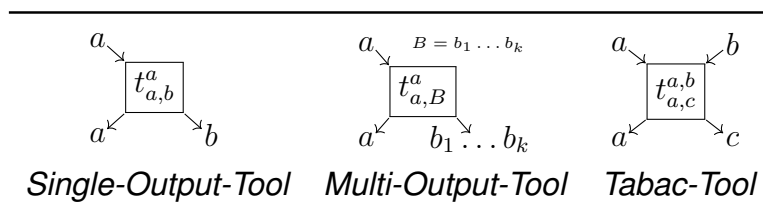


Abbildung 5.1.: Tools (Döcker et al. [25])

Eine Auktionsinstanz ist ein Tripel $\langle \mathcal{T}, \mathcal{U}_{in}, \mathcal{U}_{out} \rangle$, hierbei ist \mathcal{T} die Menge der dem Auktionator zugänglichen Transformationen. Das Bündel $\mathcal{U}_{in} \in \mathbb{N}_0^G$ besitzt der Auktionator

³Wir benutzen die Standardnotation aus der Mengentheorie für Multimengen (vgl. Knuth [52]).

⁴Man beachte, dass in der Publikation Döcker et al. [25] mit \mathbb{N} die natürlichen Zahlen inklusive der 0 bezeichnet sind.

⁵Aufgrund dieser Darstellung ist auch der Name Tabac-Tool entstanden.

5. Tool Auctions

anfangs, das Bündel $\mathcal{U}_{\text{out}} \in \mathbb{N}_0^G$ möchte er besitzen. Die Lösung einer Auktionsinstanz ist eine endliche Folge $\Sigma = t^1, t^2, \dots, t^\ell$ von Anwendungen möglicher Transformationen aus \mathcal{T} . Wir bezeichnen jedes t^i , welches von der Form $\langle \tau^i, \mathcal{I}^i, \mathcal{O}^i \rangle$ ist, als eine *Aktion* in der Folge. Insbesondere können zwei Aktionen in Σ die Anwendung derselben Transformation sein. Die *Länge* von Σ ist $|\Sigma| = \ell$. Wir benutzen Multimengen $\mathcal{M}^i \in \mathbb{N}_0^G$, um die Gütermenge nach Anwendung der i ten Aktion in Σ zu beschreiben. Eine Folge Σ heißt *zulässig*, falls zu jedem Zeitpunkt des Prozesses der Auktionator alle notwendigen Güter besitzt, um die nächste Aktion durchführen zu dürfen. Insbesondere muss auch jeweils das relevante Tool vorhanden sein, d. h. es muss gelten $\mathcal{I}^i \subseteq \mathcal{M}^{i-1}$ und $\tau^i \in \mathcal{M}^{i-1}$ für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Wir sagen, dass Σ die gewünschten Output-Goods \mathcal{U}_{out} *erreicht*, falls $\mathcal{U}_{\text{out}} \subseteq \mathcal{M}^\ell$. In diesem Fall schreiben wir $\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}_{\text{out}}$. Im Folgenden verwenden wir den Ausdruck *Lösung* nur noch für zulässige Folgen, die die jeweils gewünschten Output-Goods erreichen. Nun können wir die beiden für das Modell wichtigen Entscheidungsprobleme FEASIBILITY und WINDET auch formell einführen, siehe Tabelle 5.1. Das Entscheidungsproblem der *Machbarkeit* FEASIBILITY fragt, ob für eine gegebene Auktionsinstanz überhaupt eine Lösung existiert. Die weitergehende Frage nach einer optimalen Lösung ist das Entscheidungsproblem der *Gewinnerermittlung* WINNER DETERMINATION (WINDET).

Tabelle 5.1.: Entscheidungsprobleme in Tool Auctions. (Aus dem Englischen nach Döcker et al. [25])

FEASIBILITY	
Instanz	: Eine Auktionsinstanz $\langle \mathcal{T}, \mathcal{U}_{\text{in}}, \mathcal{U}_{\text{out}} \rangle$.
Frage	: Gibt es eine zulässige Folge Σ , sodass $\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}_{\text{out}}$?
WINNER DETERMINATION (WINDET)	
Instanz	: Eine Auktionsinstanz $\langle \mathcal{T}, \mathcal{U}_{\text{in}}, \mathcal{U}_{\text{out}} \rangle$ und eine Zahl $K \in \mathbb{N}_0$.
Frage	: Gibt es eine zulässige Folge Σ , sodass $ \Sigma \leq K$ und $\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}_{\text{out}}$?

Zur Veranschaulichung des Modells betrachten wir das Beispiel 10. Eine Visualisierung dieses Beispiel bietet die Abbildung 5.2.

Beispiel 10. In Anlehnung an das Eingangszitat betrachten wir das Szenario, dass ein Zwerg (der Auktionator) mit einer *Schmiede* (interpretiert als Gut) startet und in möglichst wenigen Arbeitsschritten (d. h. mit so wenig Aktionen wie möglich) die Güter *Waffen-Set* und *Spitzhacke* erreichen will. Dabei hat er die folgenden Transformationen als Option:

- $\{\text{Schmiede}\} \mapsto \{\text{Schmiede}, \text{Axt}\}$
- $\{\text{Streitaxt}\} \mapsto \{\text{Streitaxt}, \text{Waffen-Set}\}$
- $\{\text{Schmiede}, \text{Axt}\} \mapsto \{\text{Schmiede}, \text{Streitaxt}\}$
- $\{\text{Axt}\} \mapsto \{\text{Axt}, \text{einfache Werkzeuge}\}$
- $\{\text{einfache Werkzeuge}\} \mapsto \{\text{einfache Werkzeuge}, \text{Spitzhacke}\}$
- $\{\text{einfache Werkzeuge}\} \mapsto \{\text{einfache Werkzeuge}, \text{komplexe Werkzeuge}\}$
- $\{\text{komplexe Werkzeuge}\} \mapsto \{\text{einfache Werkzeuge}, \text{Spitzhacke}, \text{Waffen-Set}\}$

Beschreiben wir dies formal: Gegeben seien die Güter $G = \{a, b, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2\}$ und die Auktionsinstanz $\langle \mathcal{T}, \{a\}, \{d_1, d_2\} \rangle$, mit $\mathcal{T} = \{t_{a,b}^a, t_{a,c_1}^{a,b}, t_{c_1,d_1}^{c_1}, t_{b,c_2}^b, t_{c_2,d_2}^{c_2}, t_{c_2,c_3}^{c_2}, t_{c_3,d_1d_2}^{c_3}\}$. Formal besitzt der Auktionator also anfangs das Gut a und will am Ende das Bündel $\{d_1, d_2\}$ erreichen. Es ist $\Sigma_1 = t_{a,b}^a, t_{a,c_1}^{a,b}, t_{c_1,d_1}^{c_1}$ die kürzeste Folge, um $\{d_1\}$ zu erreichen, $\Sigma_2 = t_{a,b}^a, t_{b,c_2}^b, t_{c_2,d_2}^{c_2}$ wiederum ist die kürzeste Folge, die $\{d_2\}$ erreicht. Durch Kombination dieser zwei Folgen erhalten wir eine erste Lösung: Die zulässige Folge $\Sigma = t_{a,b}^a, t_{a,c_1}^{a,b}, t_{c_1,d_1}^{c_1}, t_{a,b}^a, t_{b,c_2}^b, t_{c_2,d_2}^{c_2}$ hat Länge 6 und $\Sigma \rightsquigarrow \{d_1, d_2\}$. Man bemerke, dass einige, jedoch nicht alle Permutationen von Σ ebenfalls zulässige Folgen sind; insbesondere kann die Transformation t_{b,c_2}^b nur als i te Aktion t^i angewandt werden, falls $b \in \mathcal{M}^i$. Bei einer Permutation von Σ ist eine Anwendung von $t_{a,b}^a$ unnötig, was uns die verbesserte Lösung $\Sigma' = t_{a,b}^a, t_{b,c_2}^b, t_{c_2,d_2}^{c_2}, t_{a,c_1}^{a,b}, t_{c_1,d_1}^{c_1}$ der Länge 5 liefert. Die optimale Lösung $\Sigma^* = t_{a,b}^a, t_{b,c_2}^b, t_{c_2,c_3}^{c_2}, t_{c_3,d_1d_2}^{c_3}$ hat jedoch Länge 4. Die Folge Σ^* nutzt dabei Synergien beim Erreichen von $\{d_1, d_2\}$.

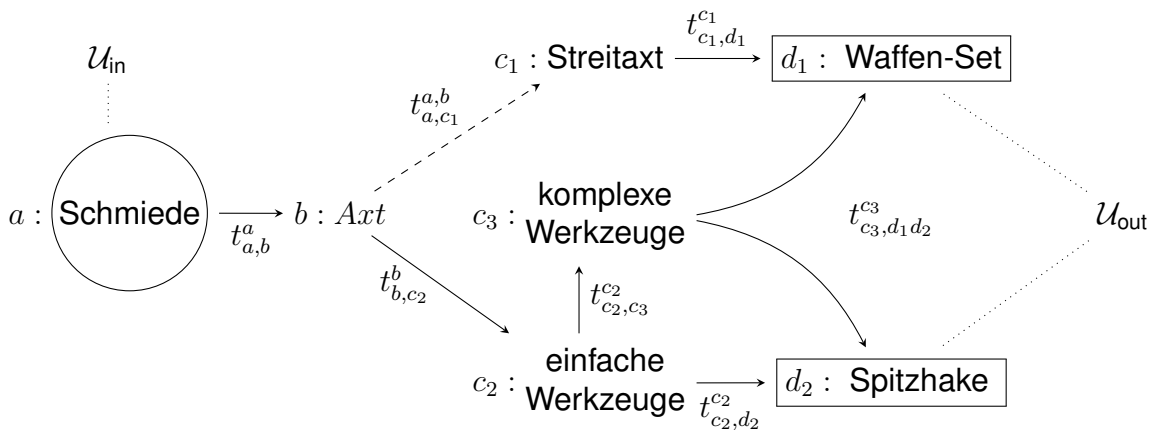


Abbildung 5.2.: Visualisierung von Beispiel 10. (In Anlehnung an Döcker et al. [25])

5.2.1. Designwahlen

In diesem Abschnitt werden wir einige Eigenheiten unseres Modells beleuchten, insbesondere um die Unterschiede zu anderen MMUCA-Modellen aufzuzeigen. Darüber hinaus diskutieren wir die jeweiligen Implikationen und Alternativen.

Kostenlose Entsorgung: Indem wir nur $\mathcal{U}_{\text{out}} \subseteq \mathcal{M}^\ell$ anstatt $\mathcal{U}_{\text{out}} = \mathcal{M}^\ell$ voraussetzen, machen wir die implizite Annahme, dass der Auktionator nicht erwünschte Gütern kostenlos entsorgen kann, bzw. dass für ihn zusätzliche Güter keine zusätzlichen Kosten verursachen. Kurz: Wir postulieren, dass es keine Entsorgungs- oder Lagerkosten für die Güter gibt. Falls man $\mathcal{U}_{\text{out}} = \mathcal{M}^\ell$ fordert, ist FEASIBILITY für Multi-Output-Tools NP-vollständig, wie durch Reduktion vom NP-vollständigen Problem EXACT COVER BY 3-SETS (X3C) (A.1.1: Problem 4) auf FEASIBILITY gezeigt werden kann. FEASIBILITY für Single-Output-Tools wäre jedoch in Polynomialzeit lösbar.

Unbegrenzte Anwendung von Transformationen: Jede Transformation kann beliebig häufig verwendet werden. Allerdings ist jede Durchführung mit Kosten (im Sinne von WINDET, d. h. mit einer größeren Länge der entsprechenden Folgen) verbunden. Diese Annahme reflektiert die Tatsache, dass wir unter einer Transformation eher die Inanspruchnahme einer Dienstleistung bzw. die Durchführung einer Aktion verstehen als einen Austausch von Gütern. Dies ist ein signifikanter Unterschied zum MMUCA-Modell von Cerquides et al. [16] und Fionda und Greco [39]. In der Komplexitätsanalyse wird das für die Ergebnisse von Szenarien mit Tabac-Tools relevant: Theorem 7 besagt, dass FEASIBILITY für Szenarien mit Tabac-Tools PSPACE-vollständig ist. Dies ist direkt mit dieser Designwahl verbunden, insbesondere wird in keinen anderen Veröffentlichungen ein PSPACE-vollständiges Problem im Themengebiet MMUCA identifiziert. Die Alternative wäre, für jede Transformation festzulegen, wie oft sie maximal verwendet werden kann.

Keine Typisierung der Güter: Wie im Eingangsbeispiel aufgeführt, unterscheiden wir auf Szenarienebene die Güter nicht nach Typen. Ein Gut ist nicht per se ein Tool, es ist es nur im Kontext mit einer gewissen Transformation. Ein und dasselbe Gut kann sowohl Tool in verschiedenen Transformationen sein also auch in anderen Transformationen ein Element von \mathcal{I} oder \mathcal{O} sein. Von dieser Annahme weichen wir für Proposition 11 und Theorem 12 ab, dabei nehmen wir eine Typisierung in dem Sinne an, dass Tools nicht verbraucht werden.⁶

⁶Im Beispiel 10 ist z.B. keine Typisierung der Güter gegeben, da die Transformation

5.3. Diskussion der Ergebnisse der Komplexitätsanalyse

5.3.1. Resultate der klassischen Komplexitätsanalyse

Die Tabelle 5.2 gibt eine Übersicht über die Komplexität der Entscheidungsprobleme FEASIBILITY und WINDET. Analysiert wurden die drei Szenarien, in denen jeweils nur ein Typ von Tool-Transformationen vorkommt. Die Komplexität dieser Probleme für den Spezialfall, dass nur Tabac-Tools zugelassen sind, wurde mit und ohne die Annahme der Typisierung von Gütern (vgl. Designwahl 5.2.1) analysiert.

Tabelle 5.2.: Übersicht über die Resultate der Komplexitätsanalyse verschiedener Varianten von Tool Auctions. Die Tabelle entspricht der Tabelle 3 in Döcker et al. [25], die Nummerierung der Propositionen und Theoreme bezieht sich auf die dortige Nummerierung. (Döcker et al. [25])

Tool-Transformationen	FEASIBILITY		WINDET	
Single-Output-Tools	in P	(Prop 1)	NP-v	(Thm 2)
Multi-Output-Tools	in P	(Prop 3)	NP-v	(Thm 4)
Tabac-Tools	PSPACE-v (Prop 7)		PSPACE-v (Thm 8) (<i>K binär kodiert</i>)	NP-v (Thm 9) (<i>K unär kodiert</i>)
Tabac-Tools mit Typisierung	in P	(Prop 11)	in P	(Thm 12)

Zunächst einmal stellen wir fest, dass es bezüglich der klassischen Komplexitätsanalyse keinen Unterschied zwischen der ersten zwei Szenarien gibt. Die Unterscheidung in Single- und Multi-Output-Tools ist bei unseren Designwahlen aus dieser Perspektive gesehen also irrelevant. Bei Tabac-Tools zeigen wir für FEASIBILITY die PSPACE-Vollständigkeit, was wir bereits im Rahmen der Designwahlen kurz diskutiert haben. Die Möglichkeit, Transformationen unendlich oft verwenden zu können, führt zu einem zusätzlichen Bedarf an Speicherplatz. Die Kodierung von K , also der maximalen gesuchten Länge von Lösungsfolgen, in WINDET ist unter der Verwendung von Tabac-Tools relevant. Falls K unär kodiert ist, reduziert sich die Komplexität auf NP-Vollständigkeit.

$\{\text{Schmiede}, \text{Axt}\} \mapsto \{\text{Schmiede}, \text{Streitaxt}\}$ das an anderer Stelle als Tool benötigte Gut Axt als Input-Good benötigt.

5.3.2. Vergleich mit den Ergebnissen von Fionda und Greco

Der Vergleich mit den Ergebnissen von Fionda und Greco [39] offenbart signifikante Unterschiede. Fionda und Greco untersuchen die Grenzen der Komplexität für MMUCA unter Beachtung zweier Dimensionen.

Die erste Dimension ist die der *bidding language*, also der Einfluss der Kodierung der Transformationen. Wir machen in Tool Auctions die zwei Annahmen, dass erstens alle verfügbaren Transformationen in \mathcal{T} explizit aufgelistet sind und zweitens beliebig miteinander kombiniert werden dürfen (zumindest solange die resultierenden Folgen zulässig sind). Diese zwei Annahmen entsprechen bei Fionda und Greco [39] (bzw. bei Cerquides et al. [16]) einer Kodierung der Transformationen in der sogenannten *OR-Language*.⁷ Deswegen ziehen wir zum Vergleich nur die Ergebnisse bezüglich der Kodierung in der OR-Language von Fionda und Greco [39] heran.

Die zweite Dimension ist die der strukturellen und qualitativen Einschränkungen für Transformationen. Strukturelle Einschränkungen sind auf Netzwerke bezogen, die die zulässigen Kombinationen von Transformation modellieren, Fionda und Greco [39] bedenken „*transformations graphs*“ und „*good graphs*“.⁸ Im Gegensatz zu strukturellen Einschränkungen sind qualitative Einschränkungen für jede Transformation einzeln vorgegeben bzw. überprüfbar. Für uns spielt die Frage nach strukturellen Einschränkungen (Fionda und Greco untersuchen (fast) azyklische Instanzen) keine Rolle. Der spannende Unterschied zeigt sich bezüglich qualitativer Einschränkungen. Unsere Beschränkung auf Tool-Transformationen ist eine ebensolche qualitative Einschränkung.

Im MMUCA-Modell von Fionda und Greco [39] gibt es im Gegensatz zu unserem für eine Transformation kein ausgewiesenes Tool τ . Das heißt, Transformationen haben dort anstatt der Form $t = \langle \tau, \mathcal{I}, \mathcal{O} \rangle$ die Form $t = \langle \mathcal{I}, \mathcal{O} \rangle$. Fionda und Greco betrachten die folgenden sechs qualitativen Parameter. Für eine formale Definition verweisen wir auf die Arbeit von Fionda und Greco [39].

Varität: Die *Input-Variety IV* (*Output-Variety OV*) ist die maximale Anzahl verschiedener Güter, die als Input-Goods (Output-Goods) in Transformationen auftauchen.

⁷*Bidding languages* für MMUCA werden in der Publikation *Bidding languages and winner determination for mixed multi-unit combinatorial auctions* von Cerquides et al. [16] ausführlicher erörtert.

⁸In „*transformations graphs*“ entsprechen die Knoten den Transformationen und eine Kante zeigt an, dass eine Transformation ein Gut produziert, welches von der anderen Transformation benötigt wird. In „*good graphs*“ entsprechen die Knoten den Gütern und eine Kante zeigt an, dass ein Gut in ein anderes umgewandelt werden kann.

Multiziplität: Die *Input-Multiplicity* IM (*Output-Multiplicity* OM) ist die maximale Anzahl an identischen Kopien, die in einer Transformation als Input-Goods (Output-Goods) vorkommen.

Grad: Der *Input-Degree* ID (*Output-Degree* OD) ist die maximale Anzahl an Transformationen, die ein bestimmtes Gut produzieren (verbrauchen).

Eine Übersichtliche Darstellung der folgenden Ausführungen findet sich in Tabelle 5.3.

Wie bereits erläutert, müssen wir unsere Ergebnisse mit den Ergebnissen von Fionda und Greco [39] vergleichen, die Szenarien betreffen, in denen die *OR*-Language zur Kodierung der Transformationen verwendet wird. Hier haben Fionda und Greco einen sehr klaren Grenzverlauf der Komplexität herausgearbeitet: Instanzen mit $ID = 1$ oder $OD = 1$ sind trivial (und damit in Polynomialzeit lösbar), Instanzen mit $IV = OV = IM = OM = 1$ ebenfalls (Theoreme 3.1, 3.2 und 3.2 in der Publikation von Fionda und Greco [39]), jede Lockerung von IV , OV , IM , OM (von 1 auf 2) führt zu NP-schweren Szenarien für FEASIBILITY (Theoreme 3.5 und 3.6 in der Publikation von Fionda und Greco [39]).

Betrachten wir nun die Werte der qualitativen Parameter für die für uns betrachtenden Szenarien. Bei auf Single-Output-Tools beschränkte Szenarien gilt: $IV = 1$, $OV = 2$, $IM = 1$, $OM = 1$, $ID = \infty$ und $OD = \infty$. Diese Werte ändern sich bei auf Multi-Output-Tools beschränkte Szenarien folgendermaßen: $IV = 1$, $OV = \infty$, $IM = 1$, $OM = \infty$, $ID = \infty$ und $OD = \infty$. Für beide Szenarien ist FEASIBILITY in Polynomialzeit lösbar wie die Propositionen 1 [25] und 3 [25] zeigen. Für Szenarien nur mit Tabac-Tools haben wir die folgenden Werte: $IV = 2$, $OV = 2$, $IM = 1(2)$, $OM = 1(2)$, $ID = \infty$ und $OD = \infty$.⁹ Nach Proposition 7 [25] ist FEASIBILITY für auf Tabac-Tools beschränkte Szenarien PSPACE-vollständig, unter der Annahme der Typisierung von Gütern nach Proposition 11 [25] jedoch in Polynomialzeit lösbar.

⁹Ein Szenario mit der Beschränkung auf Tabac-Tools, bei dem die Transformation $t_{a,a}^{a,a}$ vorkommt, hätte die Werte $IM = 2$ und $OM = 2$, alle sinnvollen entsprechenden Szenarien hätten allerdings die Werte $IM = 1$ und $OM = 1$.

5. Tool Auctions

Tabelle 5.3.: Tabellarische Darstellung des Vergleichs zu Fionda und Greco [39]. (In Anlehnung an Fionda und Greco [39] (a) bzw. Eigene Darstellung (b))

Werte der qualitativen Parameter						Komplexität
<i>IV</i>	<i>OV</i>	<i>IM</i>	<i>OM</i>	<i>ID</i>	<i>OD</i>	FEASIBILITY
1	1	1	1	∞	∞	in P
∞	∞	∞	∞	1	∞	
∞	∞	∞	∞	∞	1	
2	1	1	1	2	2	NP-v
1	2	1	1	2	2	
1	1	2	1	2	2	
1	1	1	2	2	2	

a) Tabellarische Darstellung der Resultate von Fionda und Greco [39] bezüglich der Kodierung der Transformationen in der OR-Language. Man vergleiche die Theoreme 3.1-3.6 in der Publikation von Fionda und Greco [39].

Szenario in Tool Auctions	Werte der qualitativen Parameter						Komplexität
	<i>IV</i>	<i>OV</i>	<i>IM</i>	<i>OM</i>	<i>ID</i>	<i>OD</i>	FEASIBILITY
Single-Output-Tools	1	2	1	1	∞	∞	in P
Multi-Output-Tools	1	∞	1	∞	∞	∞	in P
Tabac-Tools	2	2	1*	1*	∞	∞	PSPACE-vollständig
... mit Typisierung	2	2	1*	1*	∞	∞	in P

* Ein Szenario mit der Beschränkung auf Tabac-Tools, bei dem die Transformation $t_{a,a}^{a,a}$ vorkommt, hätte die Werte $IM = 2$ und $OM = 2$, alle sinnvollen entsprechenden Szenarien hätten allerdings die Werte $IM = 1$ und $OM = 1$.

b) Die Ergebnisse der von uns bezüglich der Komplexität von FEASIBILITY analysierten Szenarien in Tool Auctions. Die qualitativen Parameter nach Fionda und Greco [39] für diese Szenarien sind mit angegeben. Es sei daran erinnert, dass diese Werte den Aspekt von Werkzeug-Gütern nicht beachten. Man vgl. die Propositionen 1,3,7 und 11 in der Publikation Döcker et al. [25].

Der Vergleich der Ergebnisse zeigt, dass unser Ansatz der qualitativen Restriktionen durch Werkzeug-Güter sich grundsätzlich von dem von Fionda und Greco unterscheidet. Zwar können wir unsere Restriktionen durch die von Fionda und Greco betrachteten Parameter ausdrücken, dabei würde aber der Aspekt der Tools völlig außer acht gelassen. Kurz zusammengefasst: Keines der von uns betrachteten Szenarien entspricht jenen von Fionda und Greco. Selbst bei solchen, die den unseren am ehesten entsprechen, erhalten die Autoren völlig andere Resultate der Komplexitätstheorie. Insbesondere implizieren sich keine Ergebnisse der beiden Arbeiten.

5.3.3. Übersicht über die FPT-Resultate

Im letzten Abschnitt der Publikation betrachten wir das Problem WINDET im Modell Tool Auctions aus dem Blickwinkel der parametrisierten Komplexitätstheorie. Die im Folgenden verwendeten Begriffe aus der parametrisierten Komplexitätstheorie werden im Appendix A.1 erläutert. Eine Übersicht der Ergebnisse bietet die Tabelle 5.5.

Tabelle 5.5.: Übersicht über die Resultate der parametrisierten Komplexitätsanalyse von WINDET in Tool Auctions. (Döcker et al. [25])

Typ von Transformationen	Parameter	Ergebnis
Single-Output-Tools	$ \Sigma $	in FPT (Cor 6, [25])
Multi-Output-Tools	$ \Sigma $	$W[2]$ -schwer (Thm 5, [25])
Multi-Output-Tools	$ \mathcal{U}_{\text{out}} $	in FPT (Cor 6, [25])
Multi-Output-Tools	$ \Sigma + \max \mathcal{O} $	in FPT (Cor 6, [25])
Tabac-Tools	$ \Sigma $	$W[1]$ -schwer (Thm 10, [25])
<i>mixed tools under noncons.-tool restr.</i>	$ \{a \mid t_{ac}^{ab} \in \mathcal{T}\} + \sum_{a \in G_a} \mathcal{U}_{\text{out}}(a)$	in FPT (Thm 13, [25])

Bezüglich des Parameters $|\Sigma|$, also der Länge von Lösungen, ist WINDET unter der Restriktion von Single-Output-Tools in der Klasse FPT, d. h. unter der Annahme, dass $|\Sigma|$ nicht zu groß ist, effizient lösbar. Lockern wir die Restriktionen zu Multi-Output-Tools, ist WINDET jedoch $W[2]$ -schwer bezüglich des Parameters $|\Sigma|$, also unter dieser Parametrisierung (vermutlich) nicht effizient lösbar.

WINDET unter der Restriktion von Multi-Output-Tools ist jedoch bezüglich zweier anderer Parameter in der Klasse FPT. Der erste Parameter ist die Mächtigkeit des Zielbündels $|\mathcal{U}_{\text{out}}|$, der zweite ist die Summe von Lösungslänge und maximaler Anzahl von Produkten in Transformationen. Beide bieten sich als sinnvolle Parameter in der Praxis an.

Auch unter der Restriktion auf Tabac-Tools ist $|\Sigma|$ kein geeigneter Parameter um effiziente Lösbarkeit zu erwarten: Das Problem WINDET ist in diesem Spezialfall bezüglich dieses Parameters $W[1]$ -schwer.

Unter der Annahme der Typisierung von Gütern (vgl. Designwahlen 5.2.1) gibt es jedoch einen günstigen Parameter für allgemeine Tool Auctions (d. h. alle drei Typen von Tool-Transformationen können vorkommen), der eng mit der Menge der Tabac-Tools verknüpft ist. Wählen wir als Parameter die Summe von (i) der Anzahl von Gütern die

5. Tool Auctions

in Tabac-Tools als Tool vorkommen und (ii) der Summe der Multiziplitäten der Güter aus (i) , die in den Output-Goods \mathcal{U}_{out} auftauchen, so ist WINDDET in FPT.¹⁰

5.4. Fazit und Ausblick

Wir haben das Modell Tool Auctions als Variante von MMUCA eingeführt und eine detaillierte Komplexitätsanalyse der beiden Standardprobleme FEASIBILITY und WINDET herausgearbeitet. Mit Ausnahme der FEASIBILITY für Single- und Multi-Output-Tools sind diese Probleme im Allgemeinen schwierig im Sinne der Komplexitätstheorie. Für den Fall von Tabac-Tools konnten wir allerdings einen interessanten Spezialfall identifizieren, der praktische Relevanz hat und in Polynomialzeit lösbar ist. Des Weiteren haben wir das Problem WINDET auf seine parametrisierte Komplexität untersucht und konnten sowohl einfache als auch schwierige Fälle identifizieren.

Für zukünftige Forschungsarbeiten haben wir die Entwicklung von Algorithmen zur Lösung von Instanzen von Tool Auctions im Sinn. Darüber hinaus wäre eine Analyse von konkreten Beispielen von Tool Auctions interessant, um abschätzen zu können, welche Werte der unterschiedlichen Parameter typischerweise als klein angenommen werden können. Als mögliche Anwendungen des Modells sehen wir neben industriellen Lieferkettenmanagement auch Internetplattformen für das Handeln von Dienstleistungen und Gütern.

¹⁰Man beachte, dass (ii) nicht von (i) beschränkt ist.

6. Fall If It Lifts Your Teammate

Die Sozialwahlprobleme der bisher diskutierten Publikationen waren Zuordnungs- und Zuteilungsprobleme. Lösungen für diese Probleme wurden jeweils mit Blick auf die Präferenzen der Agenten bestimmt. Nun geht es um die Aggregation von Präferenzen (in Form von strikt linearen Ordnungen) zu einer kollektiven Präferenz (in Form einer schwach linearen Ordnung). Anstatt eines Zuordnungs- oder Zuteilungsproblems betrachten wir hier ein Wahlproblem.

Die Inspiration für die Publikation *Fall If It Lifts Your Teammate: A Novel Type of Candidate Manipulation* von Kruger und Schneckenburger [54] kommt aus dem Leistungssport. Bei den Olympischen Spielen in Tokio 2020 wird es erstmals einen Wettkampf im Klettern geben. Im Sportklettern gibt es drei Disziplinen: Speed, Bouldern und Lead.¹ Eigens für diesen Wettkampf wurde durch die *International Federation of Sports Climbing* (IFSC) ein neues Wettkampfformat geschaffen, das die drei Sportkletterdisziplinen in einem Wettkampf kombiniert, dem *Combined Olympic Format* (COF) (siehe IFSC [49]). Hierbei wird in jeder der drei Disziplinen ein Wettkampf durchgeführt und jeweils eine Rangliste aller teilnehmenden Athleten generiert. Aus den drei Ranglisten wird dann ein Gesamtrangliste gebildet. Das geschieht dadurch, dass für jeden Athleten das Produkt seiner drei Einzelplatzierungen gebildet wird. Je niedriger dieser Wert ist, desto besser ist die Endplatzierung des Athleten. Ergibt sich für zwei Athleten dasselbe Produkt, so wird derjenige Athlet besser platziert, der den anderen in zwei Disziplinen übertrifft.² Der Wettkampf wird in zwei Runden ausgetragen: einer Qualifikationsrunde mit zwanzig Athleten, gefolgt von einer Finalrunde der besten sechs. Das COF verfolgt also einen vollkommen anderen Ansatz zur Gewinnerermitt-

¹Lead ist das Schwierigkeitsklettern im Vorstieg mit Seil, Bouldern das Schwierigkeitsklettern ohne Seil in niedrigen Höhen über Fallschutzmatten. In der Disziplin Speed geht es darum, eine standardisierte Kletterroute so schnell wie möglich zu meistern, während man durchgehend von oben mit einem Seil gesichert ist. Eine ausführlichere Beschreibung findet sich auf der Website des Alpenvereines [3].

²Da es drei Disziplinen gibt, ist diese Regelung bei Punktegleichstand von zwei Athleten wohldefiniert. Bei Punktegleichheit von drei oder mehr Athleten ist dies im Allgemeinen nicht der Fall, wie das Beispiel 11 anhand einer Querverbindung zum Condorcet-Paradoxon zeigt.

6. *Fall If It Lifts Your Teammate*

lung als die meisten anderen Sportwettkämpfe in Kombinationssportarten. Typisch ist z. B. der moderne Zehnkampf. Die erbrachten Leistungen in jeder Disziplin werden hier anhand von Punktetabellen zu einer Gesamtpunktzahl verrechnet, der Athlet mit den meisten Punkten gewinnt.³ Aus sportpolitischen Gründen mussten alle drei Kletterdisziplinen Teil des neuen olympischen Wettkampfes sein, aus sportartspezifischen Gründen war ein System auf Basis von Punktetabellen jedoch nicht funktional. Es wird also mit ordinalen und nicht mit kardinalen Informationen gearbeitet. Motiviert aus dem COF betrachten wir in der Publikation eine Variante des klassischen Wahlproblems, bei dem die Kandidaten durch die Athleten ersetzt sind und die Wähler durch die Disziplinen. Diese Variante bezeichnen wir als *kombinierte Wettkämpfe*.

In der folgenden Diskussion erläutern wir die Hintergründe und die Motivation des Modells *kombinierte Wettkämpfe*. Einen besonderen Fokus legen wir auf die Verbindung zum Theorem von Arrow. Diese Verbindung ergibt sich dadurch, dass das COF anfällig für Manipulationen vonseiten der Athleten ist und diese Art von Manipulation einer Verletzung des Axioms der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen entspricht (vgl. die Ausführungen zu Arrows Theorem in Abschnitt 1.1.1).

Der Rest dieses Kapitels ist wie folgt organisiert. In Abschnitt 6.1 führen wir das Modell *kombinierte Wettkämpfe* ein, hierbei erläutern wir insbesondere die Motivation hinter dem Projekt, sowie die Verbindung und die Unterschiede zur klassischen Wahltheorie. Im Rahmen des Projektes schätzten wir die Häufigkeit problematischer Instanzen anhand von Simulationen ab, die Annahme hinter diesen Simulationen sowie unsere Ergebnisse diskutieren wir in Abschnitt 6.2. Der axiomatischen Methode angewandt auf das Modell *kombinierte Wettkämpfe* widmet sich der Abschnitt 6.3. In diesem Abschnitt erläutern wir unser Unmöglichkeitstheorem im direkten Vergleich zum Theorem von Arrow und geben eine axiomatische Charakterisierung des COF, darüber hinaus zeigen wir alternative Rankingfunktionen mit besseren Eigenschaften (aus Sicht der axiomatischen Methode) auf. Das Kapitel wird mit einem Fazit und Ausblick in Abschnitt 6.4 abgeschlossen.

³Die derzeit gültigen Punktetabellen wurden 1985 festgelegt. Die Einträge orientieren sich an den damals geltenden Weltrekorden in den jeweiligen Einzeldisziplinen. Gewertet wird also die *absolut* erbrachte Leistung. Im Gegensatz dazu ist im COF die *relative* Leistung (im Vergleich zu den Konkurrenten) relevant.

Der erste Absatz in Abschnitt 6.1, in dem wir das Modell formal einführen, ist inhaltlich der Publikation (Kruger und Schneckenburger [54]) entnommen; in den folgenden Erläuterungen gehen wir hier aber deutlich über die dortige Diskussionen hinaus. Der Abschnitt 6.2 ist eine Kurzversion des entsprechenden Abschnittes in der Publikation. Der Inhalt von Abschnitt 6.3 beruht auf den Erkenntnissen der Publikation, hier arbeiten wir die Verbindung zu Arrows Theorem ausführlich auf und interpretieren darüber hinaus unsere Resultate explizit im Sinne der axiomatischen Methode. Die beiden ersten Absätze des Abschnitts 6.4 beruhen inhaltlich auf den *Final Remarks* der Publikation, die restlichen Ausführungen stellen neues Gedankengut dar.

6.1. Das Modell

Aus Sicht der Sozialwahltheorie interpretieren wir das Combined Olympic Format als Variante des klassischen Wahlproblems von Arrow. Diese Interpretation eines Wahlproblems nennen wir *kombinierte Wettkämpfe*. Die Wähler sind die *Disziplinen* $\mathcal{N} = \{\text{Speed, Bouldern, Lead}\}$, die Kandidaten die *Athleten* $A = \{a_1, \dots, a_{20}\}$ (bzw. in der Finalrunde $A = \{a_1, \dots, a_6\}$) und jede Disziplin ist mit einer strikt linearen Ordnung auf A assoziiert. Anstatt des Ausdrucks Präferenz verwenden wir in diesem Kontext jedoch den Ausdruck *Rangliste*. Das COF verwendet eine Social-Welfare-Funktion (SWF) (d. h. eine Funktion der Form $f: \mathcal{L}(A)^3 \rightarrow \mathcal{W}(A)$) zur Generierung einer *Gesamtrangliste* $\succsim_c \in \mathcal{W}(A)$. Mit \sim_c wird der symmetrische Teil von \succsim_c gekennzeichnet und mit \succ_c der asymmetrische Teil. Wir verallgemeinern dies auf beliebig große (endliche) Anzahlen von Athleten $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ und Disziplinen $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$. Eine Menge von Ranglisten $\succ = \{\succ_1, \dots, \succ_n\}$ bezeichnen wir als *Profil*. Wir können die Notation der Wahltheorie also benutzen, um die Szenarien kombinierter Wettkämpfe zu beschreiben, und verwenden in diesem Kontext für die SWF den Begriff *Rankingfunktionen*. Der *Rang* eines Athleten a in einer Rangliste \succ_i ist definiert als $r_i(a) = |\{x \in A: x \succ_i a\}| + 1$ und der *Rang* in einer Gesamtrangliste \succsim_c als $r_{\succsim_c}(a) = |\{x \in A: x \succ_c a\}| + 1$ (um Verwechslungen auszuschließen verwenden wir gelegentlich auch den Ausdruck *Gesamtrang*). In einer Gesamtrangliste können mehrere Athleten denselben Rang haben, in Ranglisten jedoch nicht.

Um die aus dem COF abgeleitete Rankingfunktion zu formalisieren benötigen wir die Konzepte des *Scores* und des *paarweisen Vergleichs*. Der *Score* eines Athleten a bezüglich eines Profils \succ ist definiert als das Produkt seiner jeweiligen Rän-

6. Fall If It Lifts Your Teammate

ge ($\prod_{i \in \mathcal{N}} r_i(a)$). Für ein gegebenes Profil $\succ \in \mathcal{L}(A)^n$ und zwei Athleten a, b kennzeichnen wir durch $aT_{\succ}b$, dass a im direkten *paarweisen Vergleich* zu b in mehr Disziplinen besser abgeschnitten hat. Mithilfe dieser beiden Konzepte definieren wir in Bezug auf ein Profil $\succ \in \mathcal{L}(A)^n$ die binäre Relation Q auf A . Für $(x, y) \in A \times A$ ist




$$xQy \quad \text{falls} \quad \prod_{i \in \mathcal{N}} r_i(x) < \prod_{i \in \mathcal{N}} r_i(y) \quad \text{oder} \quad \prod_{i \in \mathcal{N}} r_i(x) = \prod_{i \in \mathcal{N}} r_i(y) \quad \text{und} \quad xT_{\succ}y .$$

Die Relation Q ist total, jedoch nicht transitiv.⁴ Deswegen betrachten wir den *transitiven Abschluss* Q^+ von Q , das ist die minimale transitive Relation die Q enthält ($Q^+ = \bigcap \{R \subseteq A \times A : Q \subseteq R \text{ und } R \text{ ist transitiv}\}$). Die aus dem COF (innerhalb der Final- oder Qualifikationsrunde⁵) abgeleitete Rankingfunktion $\text{BN} : \mathcal{L}(A)^n \rightarrow \mathcal{W}(A)$ ist formal durch $\text{BN}(\succ) = Q^+$ definiert. Nach Konstruktion ist $\text{BN}(\succ)$ eine (schwache) lineare Ordnung auf A . Die Funktion BN bezeichnen wir als *Inverse-Borda-Nash*. Dieser Name wurde von uns gewählt, um Assoziationen zum *Nash-Produkt* (siehe Kapitel 3) und zur sogenannten *Borda-Wahl* hervorzurufen. Bei der *Borda-Wahl* bekommt jeder Kandidat pro Wähler jeweils einen Punkt pro Kandidat, den dieser Wähler unter ihm einordnet – diese Punktzahl lässt sich auch anhand des *Borda-Vektors* bestimmen, für n Kandidaten ist dies der Vektor $(n-1, \dots, 1, 0)$; der Kandidat mit dem höchsten „*Borda-Score*“ gewinnt die Wahl, bzw. die aggregierte Präferenz wird anhand der „*Borda-Scores*“ gebildet. Siehe hierzu auch den Artikel von Zwicker [77]. Die Funktion BN ordnet die Athleten anhand des *Nash-Produktes* der Einträge des „*Ranglistenvektors*“ $(1, \dots, n-1, n)$, also anhand des „*inversen Borda-Vektors*“. Hiermit wird insbesondere die „*Fairnesskomponente*“ des Nash-Produktes umgekehrt. Ein Athlet, der einmal Erster und zweimal Vierter wird (Score 16), schneidet in der Gesamtrangliste besser ab als ein Athlet, der einmal Zweiter und zweimal Dritter wird (Score 18). Tendenziell ist für BN ein „ausgeglichenes“ Leistungsniveau über alle Disziplinen hinweg eher ein Nachteil. Zur Verdeutlichung von BN dient das Beispiel 11.

⁴Haben drei oder mehr Athleten denselben Score, so kann das Condorcet-Paradoxon auftreten (vgl. Beispiel 11).

⁵Effekte, die den Übergang zwischen Qualifikations- und Finalrunde betreffen, haben wir nicht untersucht. Kommt es in der Qualifikationsrunde zu Unentschieden um die Plätze in der Finalrunde, so werden diese Unentschieden mittels einer Setzliste aufgelöst.

Beispiel 11. Die sechs Athleten $\{a, \dots, f\}$ haben es ins Finale geschafft. Nach Durchführung der Wettkämpfe in den drei Einzeldisziplinen ergeben sich die drei Ranglisten $\succ_S, \succ_B, \succ_L$ aus denen sich die Gesamtrangliste $\succ_C = \text{BN}(\{\succ_S, \succ_B, \succ_L\})$ ergibt:

Rang		: 1	2	3	4	5	6	Scores
Speed		$b \succ_S f \succ_S e \succ_S c \succ_S d \succ_S a$						$a : 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6 \quad d : 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$
Bouldern		$a \succ_B b \succ_B d \succ_B e \succ_B c \succ_B f$						$b : 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \quad e : 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$
Lead		$a \succ_L b \succ_L c \succ_L d \succ_L e \succ_L f$						$c : 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60 \quad f : 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$
Gesamtrangliste		$b \succ_C a \succ_C c \sim_C d \sim_C e \succ_C f$.

Man bemerke, dass c, d und e sich den dritten Rang teilen. Alle drei haben einen Score von 60, mithilfe des paarweisen Vergleiches kann dieses Unentschieden jedoch nicht aufgelöst werden, da $cT_{\succ}dT_{\succ}eT_{\succ}c$ gilt.⁶

In dem Projekt, aus dem diese Publikation hervorging, sollte zum einen das Modell der kombinierten Wettkämpfe einer theoretischen Analyse nach dem Vorbild der Wahltheorie unterzogen werden, zum anderen sollte das COF als Beispiel untersucht werden. Konkret hieß dies:

1. Wir wollten für Sportwettkämpfe ein formales Modell schaffen, das insbesondere Analogien und Unterschiede zur Wahltheorie abbildet. Dieses formale Modell sollte nach dem Vorbild von Arrow mit der axiomatischen Methode analysiert werden.
2. Wir wollten die Rankingfunktion BN sowohl allgemein (also auch für eine beliebige Anzahl an Disziplinen und Athleten) axiomatisch charakterisieren als auch die konkrete Implementierung im COF analysieren.
3. Wir wollten für die Rankingfunktion BN testen, wie hoch die Häufigkeiten von problematischen Instanzen unterschiedlicher Typen sind.

Die Axiome der Wahltheorie müssen für diesen Kontext neu interpretiert, teilweise auch komplett neu geschaffen werden. Unproblematisch ist der Begriff der *Neutralität*, eine Rankingfunktion heißt *neutral*, falls bei einer beliebigen Permutation der Agentenmenge die durch die Funktion entstandene Gesamtrangliste identisch permutiert wird. Das Axiom der *schwachen Pareto-Eigenschaft* interpretieren wir hier folgendermaßen.

⁶Hier begegnet uns also wieder das Condorcet-Paradoxon. Bei einem Punktegleichstand von drei oder mehr Athleten muss das Condorcet-Paradoxon jedoch nicht zwingend auftreten, wie das Beispiel 16 im Appendix A.4 zeigt.

6. *Fall If It Lifts Your Teammate*

Jede Rankingfunktion sollte die *Bedingung des klaren Gewinners* erfüllen, d. h. wenn Athlet a in allen Disziplinen besser abschneidet als Athlet b , so muss a höher gerankt werden als b . Eine Rankingfunktion nennen wir *determiniert*, wenn der Sieger (Gesamtrang 1) nur von der Rangliste *einer einzelnen* Disziplin abhängt (in dem Sinne, dass wer auch immer in dieser Disziplin Erster wird, automatisch der Gesamtsieger ist). Wir sagen dann auch, dass diese Disziplin den Sieger determiniert.

Die Rankingfunktion B_N erfüllt die Bedingung des klaren Gewinners, sie ist neutral und nicht determiniert. Man vergleiche Proposition 1 von Kruger und Schneckenburger [54]. Aus Sicht der axiomatischen Methode hat sie jedoch auch negative Eigenschaften. Wie wir sehen werden, ist B_N anfällig für Manipulation vonseiten der Athleten. Der Begriff Manipulation im Kontext von kombinierten Wettkämpfen bedarf einiger Erörterungen, auch zur Abgrenzung zu anderen in der Sozialwahltheorie betrachteten Manipulationen. Ein elementarer Unterschied zur klassischen Wahltheorie ist, dass dort die Wähler „aktiv handelnde Akteure“ sind – die Disziplinen in Sportwettkämpfen jedoch nicht. Dementsprechend sind Manipulationen hier anderer Natur. In der klassischen Wahltheorie beschäftigt man sich mit den vier folgenden Arten von Manipulationen (vergleiche Zwicker [77]).

1. Ein Wähler kann eine falsche (d. h. nicht seiner wahren Präferenz entsprechende) Stimme abgeben.
2. Ein Wähler kann entscheiden, keine Stimme abzugeben.
3. Ein Kandidat kann entscheiden, nicht zur Wahl anzutreten.
4. Es können alternative Kandidaten zur Teilnahme bewegt werden.

Die Manipulation von Typ 1 ist die klassische Manipulation in der Sozialwahltheorie, vor allem in Bezug auf Social-Choice-Funktion (SCF). Das Pendant zu Arrows Theorem für *Social-Choice-Funktionen* SCF ist das Theorem von Gibbard-Satterthwaite (Gibbard [46], Satterthwaite [70]). Dieses Unmöglichkeitstheorem behandelt die Immunität von SCF gegen Manipulationen vonseiten der Wähler. Um eine naheliegende Verwechslung auszuschließen sei hier betont, dass sich die von uns betrachtete Manipulation *vonseiten der Athleten* von den von Gibbard und Satterthwaite betrachtete Manipulation *vonseiten der Wähler* strukturell klar unterscheidet.⁷

⁷In einem gegebenen Präferenzprofil einer *Wahl*-instanz kann ein Wähler nur die mit ihm verknüpfte strikte lineare Ordnung (seine Präferenz) verfälschen, diese jedoch prinzipiell beliebig (siehe Manipulationstyp 1 auf Seite 74). Im Gegensatz dazu kann ein Athlet in einem gegebenen Profil einer

Manipulationen von Typ 2 sind mit dem sogenannten *No-Show-Paradoxon* verknüpft: Dieses beschreibt das Phänomen, dass bei vielen Wahlsystemen die paradoxe Situation auftreten kann, dass es für einen Wähler vorteilhaft ist, seine Stimme nicht abzugeben (siehe z. B. Fishburn und Brams [40]).

Manipulationen durch Beeinflussung der Kandidatenmenge (also Typ 3 und Typ 4) sind weniger klassisch, wurden aber auch schon untersucht, man vergleiche den Artikel von Campbell [13] sowie neuere Werke über strategische Kandidaturen (Brill und Conitzer [12], Dutta et al.[28] und Lang et al.[55]).

Eine weitere Sichtweise auf Manipulation bei Wahlen ist die der Kontrolle und Bestechung. Hier versucht ein externer Agent den Wahlausgang zu beeinflussen. Dazu hat er bei Bestechungsproblemen die Möglichkeit, einen oder mehrere Wähler zu Manipulationen von Typ 1 zu bewegen. Bei Kontrollproblemen hat er die Möglichkeit, die Struktur der Wahl zu verändern (z. B. durch von ihm gesteuerte Manipulationen der Typen 2 bis 4). Eine Übersicht bietet der Artikel von Faliszewski und Rothe [37]. Diese Sichtweise hat für die vorliegende Arbeit jedoch keine Relevanz.⁸

Im Kontext von Rankingfunktionen bedenken wir nun eine sehr spezifische Manipulationsart: Ein Athlet kann in einer Disziplin mit Absicht schlechter abschneiden, um so die Gesamtrangliste in seinem Sinne zu verfälschen. Dies nennen wir *manipulieren* und die jeweiligen Athleten bezeichnen wir als *Manipulatoren*. Die Funktion B_N ist *Ranking-monoton*, d. h. durch absichtlich schlechteres Abschneiden kann kein Athlet seinen Gesamtrang verbessern.⁹ Wir haben jedoch altruistische Manipulationen im Sinn, also Manipulationen von denen ein anderer als der Manipulator profitiert. Bei Olympia sind für den Kletterwettkampf maximal zwei Athleten aus einer Nation zugelassen. Wir gehen davon aus, dass unter gewissen Umständen ein Athlet für seinen *Teamkameraden* (den anderen Athleten derselben Nationalität) manipulieren würde. Diese Manipulationen beruhen darauf, dass die relativen Gesamtränge zweier Athleten nicht aus deren relativen Abschneiden abgeleitet werden können und sind strukturell mit dem Axiom *Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen* aus der Wahltheorie verknüpft. Da der Erfolg der Manipulation aus Sicht des Athleten (Kandidaten)

Instanz eines *kombinierten Wettkampfes* Einfluss auf jede der strikt linearen Ordnungen (Ranglisten) nehmen, dies jedoch nur eingeschränkt.

⁸Die Fragestellung der Bestechung bietet sich allerdings als zukünftige Forschungsfrage an, dies greifen wir im *Fazit und Ausblick* 6.4 auf.




⁹Durch absichtlich schlechteres Abschneiden erhöht ein Athlet seinen Score und senkt schwach den Score aller anderer Athleten. Ein „Nachvornerücken“ in der Gesamtrangliste ist somit ausgeschlossen.

6. Fall If It Lifts Your Teammate

zu bewerten ist, haben wir also eine neue Art von Manipulation durch die Kandidaten im Blick, die durch den Kontext bedingt einen grundlegend anderen Ansatz als die Kandidatenmanipulation von Typ 3 oder Typ 4 der obigen Liste verfolgt. Hierauf nimmt der Untertitel unser Publikation Bezug: *A Novel Type of Candidate Manipulation*.

Beispiel 12 zeigt wieder das Resultat einer Finalrunde. Hier machen wir die zusätzliche Annahme, dass genau drei Nationen im Finale vertreten sind und es dementsprechend drei Paare von Teamkameraden gibt. Um die verschiedenen Details und die möglichen Manipulationen besser nachvollziehen zu können, ist für kombinierte Wettkämpfe die Darstellung in Tabellenform (inklusive der expliziten Nennung der Scores) hilfreich. Tabelle 6.1 enthält alle Informationen zu Beispiel 12.

Beispiel 12. Die sechs Athleten $\{a, \dots, f\}$ haben es ins Finale geschafft. Es sind genau drei Nationen vertreten, sodass es drei Paare von Teamkameraden gibt: a und b , c und d sowie e und f . Nach Durchführung der Wettkämpfe in den drei Einzeldisziplinen ergeben sich die drei Ranglisten $\succ_S, \succ_B, \succ_L$, aus denen sich die Gesamtrangliste \succ_C ergibt:

Speed		:	$a \succ_S b \succ_S c \succ_S d \succ_S e \succ_S f$	
Bouldern		:	$e \succ_B b \succ_B c \succ_B a \succ_B d \succ_B f$	
Lead		:	$d \succ_L c \succ_L f \succ_L e \succ_L a \succ_L b$	
Gesamtrangliste			:	$c \succ_C a \sim_C d \sim_C e \succ_C b \succ_C f$

Nehmen wir an, dass die Athleten den Ausgang und die Teilergebnisse dieses Finales korrekt vorhergesagt hätten. Zum Beispiel, indem sie die Ranglisten der Einzeldisziplinen der Qualifikationsrunde eingeschränkt auf die für das Finale qualifizierten Athleten berechnet hätten. Im Nachhinein hätten a , c oder f jeweils ihrem Teamkameraden zum Sieg verhelfen können, wie die folgenden Beobachtungen zeigen.

Beobachtung 0: Es hätte c in der Disziplin Speed d den dritten Rang überlassen können, mit dem neuen Score von 15 wäre d der neue Sieger. Allerdings hätte c dafür selber auf den ersten Gesamtrang verzichten müssen.

Beobachtung 1: Es hätte a sich in Speed mit dem zweiten Rang begnügen können. Hierdurch wäre der Score von b auf 12 gesunken und hätte b zum Sieger gemacht. Allerdings hätte dadurch a auf den zweiten Gesamtrang verzichten müssen.

Beobachtung 2: Es hätte f in Lead den dritten Rang e überlassen können. Dies hätte e zum Sieg verholfen und f keinen Nachteil gebracht, da dieser ohnehin abgeschlagen auf dem letzten Gesamtrang liegt.

Tabelle 6.1.: Tabellarische Darstellung von Beispiel 12. Die Auswirkungen der Spoilermanipulation von a für b sind durch \otimes gekennzeichnet, die Auswirkungen der Manipulation (strikt) ohne Opfer von f für e durch \boxtimes . Abkürzungen: B Bouldern, P Score, R Gesamtrang, PM1 und RM1 (bzw. PM2 und RM2) Score und Gesamtrang resultierend aus der Manipulation von Beobachtung 1 (bzw. Beobachtung 2). (Eigene Darstellung)

\mathcal{N}	Speed \otimes	B \otimes	Lead \otimes		P	R	PM1	RM1	PM2	RM2
a	1	\otimes 2	4	5	20	2	\otimes 40	\otimes 5	\boxtimes 20	\boxtimes 3
b	2	\otimes 1	2	6	24	5	\otimes 12	\otimes 1	\boxtimes 24	\boxtimes 5
c	3		3	2	18	1	\otimes 18	\otimes 2	\boxtimes 18	\boxtimes 2
d	4		5	1	20	2	\otimes 20	\otimes 3	\boxtimes 20	\boxtimes 4
e	5		1	4	20	2	\otimes 20	\otimes 4	\boxtimes 15	\boxtimes 1
f	6		6	3	108	6	\otimes 108	\otimes 6	\boxtimes 144	\boxtimes 6

Wir unterscheiden nun zwei Arten von Manipulationen. Einen manipulierenden Athleten bezeichnen wir im F erste die sogenannte *Spoilermanipulation* (abgeleitet vom englischen Wort *spoiler*, hier sinngemäß mit „Spielverderber“ zu übersetzen). Ein Manipulator *spoilert* erfolgreich, falls er die Gesamtrangliste zu Gunsten seines Teamkameraden so beeinflusst, dass dieser am Ende besser platziert ist als es der Manipulator ohne Manipulation gewesen wäre. Die zweite Bedingung in der Definition der Spoilermanipulation muss man deswegen fordern, weil sonst immer der eigentliche Sieger des Wettkampfs für seinen Teamkameraden spoilern könnte (im Extremfall, indem er freiwillig in jeder Disziplin Letzter wird); Manipulationen wie in Beobachtung 0 von Beispiel 12 beachten wir deswegen nicht. Die zweite von uns betrachtete Manipulationsart ist die *Manipulation ohne Opfer*: Hier kann der Manipulator die Gesamtrangliste zugunsten seines Teamkameraden verfälschen, ohne dabei seinen eigenen Rang zu verschlechtern. Gilt zusätzlich noch, dass die Anzahl der Athleten, die denselben Rang haben wie der Manipulator haben, dabei nicht zunimmt, so nennen wir das eine *Manipulation strikt ohne Opfer*. Wie wir im Verlauf dieser Diskussion sehen werden, macht die Unterscheidung zwischen der Manipulation ohne Opfer und der Manipulation *strikt* ohne Opfer tatsächlich einen entscheidenden Unterschied in Bezug auf unvereinbare Axiome für Rankingfunktionen. Beispiel 12 zeigt, dass \mathcal{BN} weder immun gegen Spoilermanipulation (vgl. Beobachtung 1) noch gegen eine Manipulation strikt

6. *Fall If It Lifts Your Teammate*

ohne Opfer ist (vgl. Beobachtung 2). Wie Beispiel 15 im Appendix zeigt ist BN ebenso nicht immun gegen Manipulationen ohne Opfer, die aber nicht strikt ohne Opfer sind. (Darüber hinaus zeigt das Beispiel 15, dass das Beispiel 11 das Resultat einer erfolgreichen Manipulation ohne Opfer sein könnte).

6.2. Simulationen

In unseren Simulationen haben wir das Auftreten von problematischen Instanzen des COF unter zufällig generierten Ausgängen von Finalrunden des COF ausgewertet. Zur Vereinfachung haben wir Instanzen analog zu Beispiel 12 simuliert, also Finalrunden mit sechs Athleten aus drei Nationen (und dementsprechend mit drei Paaren von Teamkameraden). Der Fall, dass nur drei Nationen im Finale vertreten sind, ist zwar eher unwahrscheinlich, in der Realität müssen Kooperationen zwischen Athleten aber auch nicht unbedingt nur anhand der Nationalität prädestiniert sein.¹⁰

Unsere Simulationen haben wir unter drei verschiedenen Annahmen an Korrelationen zwischen den Ranglisten in den drei Teildisziplinen durchgeführt: Keine Korrelation, positive Korrelation und negative Korrelation. Unter einer negativer Korrelation verstehen wir, dass die Ergebnisse bei zwei der drei Disziplinen positiv miteinander korreliert sind, aber negativ korreliert zur Dritten.¹¹ Für unsere Simulationen wurden unter den drei beschriebenen Annahmen zufällig je 100.000 Profile (Ausgänge der Finalrunde) erzeugt. Es wurde jeweils abgezählt, wie häufig dabei nicht auflösbare Unentschieden und die verschiedenen Arten von Manipulationen auftreten. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.2 dargestellt. Als Resümee lässt sich zunächst konstatieren, dass in der Praxis wohl kaum Unentschieden auftreten werden (die relative Häufigkeit liegt jeweils unter 1 %). Die Anfälligkeit für Manipulationen ist jedoch hoch, grob gesagt lassen jeweils mindestens die Hälfte der erzeugten Instanzen Manipulationen zu. Für eine detailliertere Beschreibung der Simulationen und der Analyse der Ergebnisse verweisen wir auf die Publikation (Kruger und Schneckenburger [54]).

¹⁰Im Finale der Männer bei den ersten deutschen Meisterschaften im Olympic Combined (2018) war ein Brüderpaar unter den sechs Finalisten. Denkbar ist auch, dass Athleten durch einen gemeinsamen Sponsor verbunden sind.

¹¹Gemeinhin gilt die Leistungsfähigkeit im Bouldern als positiv korreliert mit der Leistung im Lead und als negativ korreliert mit der im Speed.

6.3. Das Unmöglichkeitstheorem im Vergleich zu Arrows Theorem

Tabelle 6.2.: Die Prozentangaben der problematischen Instanzen pro 100.000 zufällig (mit entsprechender Korrelation) erzeugten Finalausgängen. (In Anlehnung an Kruger und Schneckenburger [54])

Die Ranglisten sind:	Unentschieden	Spoiler-manipul.	Manipul. ohne Opfer	Manipul. strikt ohne Opfer	Irgendeine Manipulation
nicht korreliert	< 1%	≈ 38%	≈ 48%	≈ 47%	≈ 60%
positiv korreliert	< 1%	≈ 14%	≈ 44%	≈ 42%	≈ 47%
negativ korreliert	< 1%	≈ 45%	≈ 49%	≈ 48%	≈ 63%

6.3. Das Unmöglichkeitstheorem im Vergleich zu Arrows Theorem

Wie wir in den Simulationen gezeigt haben, ist die Funktion BN potentiell anfällig für Manipulationen. Analog zum Theorem von Arrow stellt sich die Frage, ob es überhaupt Rankingfunktionen gibt, die immun gegen Manipulationen sind, also diese unter keinen Umständen zulassen, und gleichzeitig weitere grundsätzlich erwünschte Eigenschaften (Axiome) für Rankingfunktionen erfüllen. Diese Frage wird durch das Theorem 1 in unserer Publikation (Kruger und Schneckenburger [54]) negativ beantwortet. Unser Theorem 1 ist ein Unmöglichkeitstheorem und nahe verwandt mit dem Theorem von Arrow (Arrow [5]). Wir formulieren beide Theoreme nun im direkten Vergleich. Das Axiom der *Universellen Domäne* setzen wir dabei als gegeben voraus (d. h. alle \succ aus $\mathcal{L}(A)^n$ werden jeweils als Eingabe akzeptiert).

Theorem (Theorem 1 [54]). *Für drei oder mehr Athleten gibt es keine Rankingfunktion, die folgende drei Axiome gleichzeitig erfüllt:*

- (1) Immunität gegen Spoilermanipulation und Manipulation ohne Opfer,
- (2) Bedingung des klaren Gewinners,
- (3) nicht determiniert.

Theorem (Arrow 1951 [5]). *Für drei oder mehr Kandidaten gibt es keine Social-Welfare-Funktion, die folgende drei Axiome gleichzeitig erfüllt:*

- (1) Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen,
- (2) schwache Pareto-Eigenschaft,
- (3) keine Diktatur.

6. Fall If It Lifts Your Teammate

Der Vergleich der Axiome der Unmöglichkeitstheoreme ergibt Folgendes:

- (1) Die Kombination von *Immunität gegen Spoilermanipulation* und *Immunität gegen Manipulation ohne Opfer* ersetzt das Axiom der *Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen*. Allerdings impliziert diese Kombination nicht die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (siehe Appendix A.4.2 Proposition 3).
- (2) Die *Bedingung des klaren Gewinners* entspricht dem Axiom der *schwachen Pareto-Eigenschaft*.
- (3) Das Axiom der *Nicht-Determiniertheit* ist eine stärkere Version des Axioms *keine Diktatur* (in dem Sinne, dass eine Diktatur die Determiniertheit impliziert).

Es ist nicht von vornherein offensichtlich, dass die Voraussetzungen von Theorem 1 zu einem Unmöglichkeitstheorem führen, insbesondere da Immunität gegen Spoilermanipulation und Manipulation ohne Opfer nicht die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen impliziert. Demzufolge ist auch das Theorem 1 kein direktes Korollar aus dem Theorem von Arrow.

Die gängigen Beweise für Arrows Theorem zeigen, dass $(1) \wedge (2) \Rightarrow \neg(3)$. Unser Beweis für Theorem 1 folgt dem Beweis von Reny [67] für Arrows Theorem und hat ebenfalls diese Beweisstruktur. Eine Beweisskizze folgt.

Beweisskizze von Theorem 1. Sei f eine Rankingfunktion, die (1) immun gegen Spoilermanipulation und Manipulation ohne Opfer ist und (2) die Bedingung des klaren Gewinners erfüllt. Seien $a, b \in A$ ($|A| \geq 3$). Betrachten wir ein beliebiges Profil, bei dem a bei allen Disziplinen Erster ist und b in allen Disziplinen Letzter. Athlet a wird von f wegen (2) als alleiniger Sieger ausgewählt, ebenso ist b wegen (2) Letzter bezüglich f . Wird nun b schrittweise in allen Disziplinen in den Ranglisten so lange höher gerankt, bis er innerhalb einer Disziplin über a steht, so muss wegen (1) dieser Prozess an einem Punkt dazu führen, dass b der alleinige Sieger wird. Diese Disziplin determiniert den Sieger, da sonst gewisse kleine Abweichungen in den Ranglisten (insbesondere in Hinsicht auf andere Athleten) sofort einen Widerspruch zu den vorausgesetzten Immunitäten (1) erzeugen würden. Dabei spielt der hohe Grad an Symmetrie bei den geforderten Immunitäten eine wichtige Rolle, „niemand darf für niemanden manipulieren können“. \square

Die Rankingfunktion B_N ist nicht immun gegen Spoilermanipulation und Manipulation ohne Opfer. Durch Theorem 1 ist klar, dass es keine Rankingfunktion gibt, die beide Immunitäten erfüllt, die Bedingung des klaren Gewinners erfüllt und nicht determiniert

6.3. Das Unmöglichkeitstheorem im Vergleich zu Arrows Theorem

ist. Schwächen wir die Axiome der Immunität gegen Manipulation jedoch ab, gibt es positive Ergebnisse, d. h. Rankingfunktionen, die ein Bündel von Eigenschaften erfüllen. Konkret sind dies *iterative first place elimination* IFPE und *iterative successive last removal* ISLR. Eine informelle Beschreibung folgt im nächsten Absatz. In Tabelle 6.3a sind die von uns betrachteten Rankingfunktionen und die von ihnen erfüllten Axiome aufgelistet. Im Vergleich dazu sind in Tabelle 6.3b die beiden Unmöglichkeitstheoreme (Theorem 1 und Arrows Theorem) mitsamt den unvereinbaren Axiomen und der (gängigen) Beweisstruktur aufgeführt.

Tabelle 6.3.: Die Axiome für Rankingfunktionen im Vergleich zu den drei nach Arrows Theorem unvereinbaren Axiomen. Abkürzungen: G Bedingung des klaren Gewinners, $M1$ Immunität gegen Spoilermanipulation, $M2$ Immunität gegen Manipulation ohne Opfer, $M = M1 \wedge M2$, ND nicht determiniert, P Schwaches Pareto-Kriterium, U Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen, KD Keine Diktatur. Man beachte, dass in den Voraussetzungen zu den Unmöglichkeitstheoremen weder Neutralität noch (Ranking-)Monotonie gefordert wird. (Eigene Darstellung)

Axiome für Rankingfunktionen	BN	IFPE	ISLR	Arrows Theorem	Theorem 1
Bed. des klaren Gewinners	✓	✓	✓	P	G
Immunität gegen ...				U	$M1$
... Spoilermanipulation	✗	✓	✗		$M2$
... M. ohne Opfer	✗	✗	✓		
... M. strikt ohne Opfer	✗	✓	✓		
Nicht determiniert	✓	✓	✓	KD	ND
Neutralität	✓	✓	✓	(gängige) Beweisstruktur	
Ranking-Monotonie	✓	✓	✓	$P \wedge U \Rightarrow \neg KD \mid G \wedge M \Rightarrow \neg ND$	

a) Axiomatische Charakterisierung der Rankingfunktionen *Inverse-Borda-Nash* BN, *iterative first place elimination* IFPE und *iterative successive last removal*.

b) Axiome und (gängige) Beweisstruktur der Unmöglichkeitstheoreme (Arrows Theorem und Theorem 1 [54]).

Wir beschreiben nun die beiden Funktionen IFPE und ISLR informell. Die Funktion IFPE wählt iterativ jeweils als den am höchsten zu rankenden Athleten entweder denjenigen Athleten aus, der in mehr als der Hälfte der Disziplinen am höchsten gerankt ist, oder, falls es keinen solchen Athleten gibt, alle Athleten, die in irgendeiner Disziplin am höchsten gerankt sind.¹² Die Rankingfunktion IFPE ist immun gegen

¹²In Beispiel 12 wäre die von IFPE induzierte Ordnung \succsim mit $a \sim e \sim d \succ b \succ c \succ f$.

6. *Fall If It Lifts Your Teammate*

Spoilermanipulation und Manipulation strikt ohne Opfer, weiter erfüllt sie die Bedingung des klaren Gewinners und ist nicht determiniert. Im Gegensatz zu IFPE wird von ISLR jeweils der eindeutige (falls ein Athlet in mehr als der Hälfte der Disziplinen Letzter ist) oder die geteilten zu unterst Platzierende ausgewählt. Die Rankingfunktion ISLR ist immun gegen Manipulation ohne Opfer, erfüllt die Bedingung des klaren Gewinners und ist nicht determiniert. Beide Rankingfunktionen kommen jedoch mit dem Nachteil der fehlenden Trennschärfe, d. h. sie produzieren eine große Anzahl an Unentschieden. So ist die relative Häufigkeit bei sechs Athleten und drei Disziplinen für einen geteilten ersten Rang bei einer Auswertung durch IFPE $\frac{5}{9}$.¹³ Für mehr Disziplinen ist diese relative Häufigkeit noch größer.

6.4. Fazit und Ausblick

Unsere Interpretation von kombinierten Wettkämpfen zeigt eine enge Verbindung zum klassischen Wahlproblem nach Arrow. Das grundlegende Problem als ein Aggregationsproblem von strikt linearen Ordnungen zu interpretieren, ist sogar natürlicher, als dies für viele andere Fragestellungen der Sozialwahltheorie ist. So ist die Annahme von vollständig bekannten strikt linearen Ordnungen über allen Alternativen oft unrealistisch; warum sollte ein Agent überhaupt Präferenzen zwischen zwei für ihn unbeliebten Alternativen haben. Für kombinierte Wettkämpfe ist diese Annahme im Gegensatz dazu als natürlich anzusehen. Unsere Interpretation ist insofern neu, als dass wir strategisches Handeln von den Kandidaten (Athleten) und nicht von den Wählern (Disziplinen) annehmen. Unser Unmöglichkeitstheorem zeigt eine Variante des Theorems von Arrow, stellt aber nicht nur ein Korollar davon dar.

Für die Realität des Wettkampfes bei den Olympischen Spielen wird das Unmöglichkeitstheorem eher keine große Rolle spielen. So machen wir für unser Modell die Annahme, dass alle Athleten vollständige Information über die (unverfälschten) Ranglisten besitzen. Dies wird bei den Wettkämpfen jedoch durch eine Isolation der Athleten während der Einzelwettkämpfe ver- oder zumindest behindert. Des Weiteren ist im klassischen Individualsport Klettern der Gedanke einer altruistischen Manipulation wohl weniger naheliegend als z. B. in der Formel 1 oder im Radsport.

¹³Dies gilt unter der Annahme, dass die Ranglisten der Teildisziplinen nicht korreliert sind. Dann entspricht diese relative Häufigkeit der relativen Häufigkeit, dass bei einem Wurf mit drei Würfeln alle drei Würfel eine andere Augenzahl anzeigen: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$.

Die von uns vorgeschlagenen alternativen Rankingfunktionen sind weniger anfällig für Manipulationen. Dafür produzieren sie mehr geteilte Gesamtränge (Unentschieden) zwischen den Athleten, was in diesem Kontext als unerwünschte Eigenschaft gilt. Darüber hinaus sind sie für die Zuschauer wohl nicht so spannend (und klar) zu verfolgen – die Frage der „Fernsehtauglichkeit“ eines Wettkampfmodus ist keine Fragestellung für die Sozialwahltheorie, für die sportpolitischen Entscheidungen jedoch eine relevante Komponente.

Aus Sicht der ComSoC stellt sich für die Funktion BN noch die Frage, wie komplex es für einen Agenten ist, zu einem gegebenen Profil zu entscheiden, ob er eine (erfolgreiche) Manipulation für seinen Teamkameraden durchführen könnte. Diese Fragestellung wurde in der vorliegenden Publikation nicht untersucht. Im Appendix A.4.3 führen wir Überlegungen hierzu aus. Für die konkrete Implementierung des COF hat dies jedoch keine Bedeutung, da hier die Parameter (3 Disziplinen und 20 bzw. 6 Athleten) klein sind.

Als zukünftige Forschungsfrage haben wir einen alternativen Ansatz zu Manipulationen im Blick, die Manipulation durch Bestechung. Im Kontext von Social-Choice-Funktion wurden Fragestellungen zu Manipulation durch Bestechung schon ausführlich untersucht. Eine Übersicht bietet der Artikel von Faliszewski und Rothe [37]. Tatsächlich ist die Manipulation vonseiten der Athleten strukturell der Manipulation durch Bestechung deutlich näher als der Manipulation durch die Wähler. Die entsprechende Grundfragestellung (vgl. Faliszewski et al. [36] und Elkind et al. [30]) transferiert sich für kombinierte Wettkämpfe wie folgt. Angenommen ein externer Manipulator (d. h. ein externer Agent, der nicht selber ein Athlet ist) versucht Einfluss zu nehmen und hat hierfür ein gewisses Budget zur Verfügung. Falls nun jeder Athlet bereit ist für die Bezahlung eines gewissen Betrages in einer Disziplin einen Rang schlechter abzuschneiden (bzw. mehrere Ränge bei entsprechend höheren Beträgen), gibt es dann eine erfolgreiche Manipulationsmöglichkeit innerhalb des Budgetrahmens?

Teil III.

Verzeichnisse

Literaturverzeichnis

- [1] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, 1993.
- [2] Paul D. Allison. Measures of inequality. *American Sociological Review*, 43(6):865–880, 1978.
- [3] alpenverein.de. Lead – Bouldern – Speed – Olympic-Combined. URL https://www.alpenverein.de/wettkampf/klettern-bouldern-speedklettern/die-disziplinen-lead-bouldern-speed-olympic-combined_aid_10338.html. 2018. Abgerufen am 28. Mai 2018.
- [4] Elliot Anshelevich, Anirban Dasgupta, Jon Kleinberg, Eva Tardos, Tom Wexler, and Tim Roughgarden. The price of stability for network design with fair cost allocation. *SIAM Journal on Computing*, 38(4):1602–1623, 2008.
- [5] Kenneth J. Arrow. *Social Choice and Individual Values*. Cowles Commission Monograph No. 12. John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y.; Chapman & Hall, Ltd., London, 1951.
- [6] Ashwin Arulseivan, Ágnes Cseh, Martin Groß, David F. Manlove, and Jannik Matuschke. Many-to-one matchings with lower quotas: Algorithms and complexity. In *International Symposium on Algorithms and Computation*, pages 176–187. Springer, 2015.
- [7] Anthony B. Atkinson. On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory*, 2:244–263, 1970.
- [8] Haris Aziz and Rahul Savani. Hedonic games. In F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang, and A. D. Procaccia, editors, *Handbook of Computational Social Choice*, chapter 15. Cambridge University Press, 2015.
- [9] Coralio Ballester. NP-completeness in hedonic games. *Games and Economic Behavior*, 49(1):1–30, 2004.

- [10] Felix Brandt, Vincent Conitzer, and Ulle Endriss. Computational social choice. In G. Weiss, editor, *Multiagent Systems*, pages 213–283. MIT Press, 2013.
- [11] Felix Brandt, Vincent Conitzer, Ulle Endriss, Jérôme Lang, and Ariel D. Procaccia. Introduction to computational social choice. In F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang, and A. D. Procaccia, editors, *Handbook of Computational Social Choice*, chapter 1. Cambridge University Press, 2015.
- [12] Markus Brill and Vincent Conitzer. Strategic voting and strategic candidacy. In *Proceedings of the 29th conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, pages 819–826, 2015.
- [13] Donald E. Campbell. Manipulation of social choice rules by strategic nomination of candidates. *Theory and Decision*, 10(1):247–263, Jan 1979.
- [14] Ioannis Caragiannis, David Kurokawa, Hervé Moulin, Ariel D. Procaccia, Nisarg Shah, and Junxing Wang. The unreasonable fairness of maximum Nash welfare. In *Proceedings of the 17th ACM Conference on Economics and Computation (EC-2016)*, pages 305–322, 2016.
- [15] Katarína Cechlárová and Tamás Fleiner. Pareto optimal matchings with lower quotas. *Mathematical Social Sciences*, 88(Supplement C):3 – 10, 2017.
- [16] Jesús Cerquides, Ulle Endriss, Andrea Giovannucci, and Juan A. Rodríguez-Aguilar. Bidding languages and winner determination for mixed multi-unit combinatorial auctions. In *Proc. 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, 2007.
- [17] John R. Chamberlin and Paul N. Courant. Representative deliberations and representative decisions: proportional representation and the Borda rule. *American Political Science Review*, 77(3):718–733, 1983.
- [18] Yann Chevaleyre, Paul E. Dunne, Ulle Endriss, Jérôme Lang, Michel Lemaître, Nicolas Maudet, Julian Padget, Steve Phelps, Juan A. Rodríguez-Aguilar, and Paulo Sousa. Issues in multiagent resource allocation. *Informatica*, 30:3–31, 2006.
- [19] Yann Chevaleyre, Ulle Endriss, Jérôme Lang, and Nicolas Maudet. A short introduction to computational social choice. *SOFSEM 2007: Theory and Practice of Computer Science*, pages 51–69, 2007.
- [20] Andreas Darmann, Edith Elkind, Sascha Kurz, Jérôme Lang, Joachim Schauer,

- and Gerhard Woeginger. Group activity selection problem. In P. Goldberg, editor, *Internet and Network Economics*, pages 156–169. LNCS 7695, Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [21] Andreas Darmann. Group activity selection from ordinal preferences. In *Algorithmic Decision Theory - 4th International Conference, ADT 2015, Lexington, KY, USA, September 27-30, 2015, Proceedings*, pages 35–51, 2015.
- [22] Andreas Darmann, Janosch Döcker, Britta Dorn, Jérôme Lang, and Sebastian Schneckeburger. On simplified group activity selection. In Jörg Rothe, editor, *Algorithmic Decision Theory: 5th International Conference, ADT 2017, Luxembourg, Luxembourg, October 25–27, 2017, Proceedings*, pages 255–269. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [23] Andreas Darmann, Janosch Döcker, Britta Dorn, Jérôme Lang, and Sebastian Schneckeburger. Simplified group activity selection. In *Proceedings of the 7th International Workshop on Computational Social Choice (COMSOC-2018)*. COMSOC, 2018.
- [24] Andreas Darmann and Jérôme Lang. Group activity selection problems. In Ulle Endriss, editor, *Trends in Computational Social Choice*, chapter 5, pages 87–103. AI Access, 2017.
- [25] Janosch Döcker, Britta Dorn, Ronald de Haan, Ulle Endriss, and Sebastian Schneckeburger. Tool auctions. In *Proceedings of the 32nd AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-2018)*, February 2018.
- [26] Rod G. Downey and Michael R. Fellows. *Parameterized Complexity*. Springer, 1999.
- [27] Rod G. Downey and Michael R. Fellows. *Fundamentals of Parameterized Complexity*. Texts in Computer Science. Springer, 2013.
- [28] Bhaskar Dutta, Matthew O. Jackson, and Michel Le Breton. Strategic candidacy and voting procedures. *Econometrica*, 69(4):1013–1037, 2001.
- [29] Cynthia Dwork, Ravi Kumar, Moni Naor, and Dandapani Sivakumar. Rank aggregation methods for the web. In *Proceedings of the 10th international conference on World Wide Web*, pages 613–622. ACM, 2001.
- [30] Edith Elkind, Piotr Faliszewski, and Arkadii Slinko. Swap bribery. In *Algorithmic Game Theory*, pages 299–310. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

- [31] Ulle Endriss. Reduction of economic inequality in combinatorial domains. In *Proceedings of the 12th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS-2013)*, pages 175–182. IFAAMAS, 2013.
- [32] Ulle Endriss and Jérôme Lang, editors. *Proceedings of the 1st International Workshop on Computational Social Choice (COMSOC-2006)*. ILLC, University of Amsterdam, December 2006. <https://staff.fnwi.uva.nl/u.endriss/COMSOC-2006/proceedings.php>.
- [33] Ulle Endriss and Nicolas Maudet. Multiagent resource allocation and welfare engineering. *AgentLink News* 18, pages 3–4, August 2005.
- [34] Ulle Endriss and Nicolas Maudet. On the communication complexity of multilateral trading: Extended report. *Journal of Autonomous Agents and Multiagent Systems*, 11(1):91–107, 2005.
- [35] Ulle Endriss, Nicolas Maudet, Fariba Sadri, and Francesca Toni. Negotiating socially optimal allocations of resources. *Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)*, 25:315–348, 2006.
- [36] Piotr Faliszewski, Edith Hemaspaandra, and Lane A. Hemaspaandra. How hard is bribery in elections? *Journal of Artificial Intelligence Research*, 35:485–532, 2009.
- [37] Piotr Faliszewski and Jörg Rothe. Control and bribery in voting. In F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang, and A. D. Procaccia, editors, *Handbook of Computational Social Choice*, chapter 7. Cambridge University Press, 2016.
- [38] Michael R. Fellows, Danny Hermelin, Frances A. Rosamond, and Stéphane Vialette. On the parameterized complexity of multiple-interval graph problems. *Theoretical Computer Science*, 410(1):53–61, 2009.
- [39] Valeria Fionda and Gianluigi Greco. The complexity of mixed multi-unit combinatorial auctions: Tractability under structural and qualitative restrictions. *Artificial Intelligence*, 196:1–25, 2013.
- [40] Peter C. Fishburn and Steven J. Brams. Paradoxes of preferential voting. *Mathematics Magazine*, 56(4):207–214, 1983.
- [41] Jörg Flum and Martin Grohe. *Parameterized Complexity Theory*. Texts in Theoretical Computer Science. Springer, 2006.

- [42] Springer Gabler Verlag (Herausgeber). Stichwort: knappes Gut. URL <https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/knappes-gut-38728/version-262149>. *Wirtschaftslexikon, Gabler*, 2018. Abgerufen am 25. Juli 2018.
- [43] Springer Gabler Verlag (Herausgeber). Stichwort: Sozialwissenschaften. URL <https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/sozialwissenschaften-52181/version-275327>. *Wirtschaftslexikon, Gabler*, 2018. Abgerufen am 25. Juli 2018.
- [44] David Gale and Lloyd S Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1):9–15, 1962.
- [45] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, New York, 1979.
- [46] Allan Gibbard. Manipulation of voting schemes: a general result. *Econometrica*, 41(4):587–601, 1973.
- [47] Corrado Gini. *Variabilità e Mutabilità*. C. Cuppini, Bologna, 1912.
- [48] Ayumi Igarashi, Dominik Peters, and Edith Elkind. Group activity selection on social networks. In *Proceedings of the Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence, February 4-9, 2017, San Francisco, California, USA.*, pages 565–571, 2017.
- [49] International Federation of Sports Climbing. Combined 2017 format for IFSC events and olympic games. *ifsc-climbing.org*, 2017.
- [50] Naoyuki Kamiyama. A note on the serial dictatorship with project closures. *Operations Research Letters*, 41(5):559–561, 2013.
- [51] Bettina Klaus, David F. Manlove, and Francesca Rossi. Matching under preferences. In F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang, and A. D. Procaccia, editors, *Handbook of Computational Social Choice*, chapter 14. Cambridge University Press, 2015.
- [52] Donald E. Knuth. The art of computer programming, 3rd edn. seminumerical algorithms, vol. 2, 1997.
- [53] Yaakov Kondor. An old-new measure of income inequality. *Econometrica*, 39(6):1041–42, 1971.

- [54] Justin Kruger and Sebastian Schneckeburger. Fall if it lifts your teammate: a novel type of candidate manipulation. In *Proceedings of the 7th International Workshop on Computational Social Choice (COMSOC-2018)*. COMSOC, 2018.
- [55] Jérôme Lang, Nicolas Maudet, and Maria Polukarov. New results on equilibria in strategic candidacy. In *Proceedings of the 6th International Symposium on Algorithmic Game Theory*, pages 13–25, 2013.
- [56] Julien Lesca and Patrice Perny. LP solvable models for multiagent fair allocation problems. In *Proceedings of the 19th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI-2010)*, pages 393–398, 2010.
- [57] Max O. Lorenz. Methods of measuring the concentration of wealth. *Publications of the American statistical association*, 9(70):209–219, 1905.
- [58] Kenneth O. May. A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 680–684, 1952.
- [59] Burt L. Monroe. Fully proportional representation. *American Political Science Review*, 89:925–940, 1995.
- [60] Daniel Monte and Norovsambuu Tumennasan. Matching with quorums. *Economics Letters*, 120(1):14–17, 2013.
- [61] H. Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge University Press, 1988.
- [62] Rolf Niedermeier. *Invitation to Fixed-Parameter Algorithms*. Oxford University Press, 2006.
- [63] Noam Nisan. Bidding languages for combinatorial auctions. In Peter Cramton, Yoav Shoham, and Richard Steinberg, editors, *Combinatorial Auctions*. MIT Press, 2006.
- [64] Terry Pratchett. *Die volle Wahrheit: Ein Scheibenwelt-Roman*. Übersetzt von Andreas Brandhorst, Manhattan, Goldmann, 2012.
- [65] Ariel D. Procaccia. Cake cutting algorithms. In F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang, and A. D. Procaccia, editors, *Handbook of Computational Social Choice*, chapter 13. Cambridge University Press, 2015.
- [66] Sara Ramezani and Ulle Endriss. Nash social welfare in multiagent resource

- allocation. In *Agent-Mediated Electronic Commerce: Designing Trading Strategies and Mechanisms for Electronic Markets*, volume 59 of *Lecture Notes in Business Information Processing*, pages 117–131. Springer-Verlag, 2010.
- [67] Philip J Reny. Arrow’s theorem and the Gibbard-Satterthwaite theorem: a unified approach. *Economics Letters*, 70(1):99–105, 2001.
- [68] Jörg Rothe, editor. *Einführung in Computational Social Choice: individuelle Strategien und kollektive Entscheidungen beim Spielen, Wählen und Teilen*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1. Aufl. edition, 2012.
- [69] Tuomas W. Sandholm. Contract types for satisficing task allocation: I Theoretical results. In *Proceedings of the 1998 AAAI Spring Symposium on Satisficing Models*, 1998.
- [70] Mark A. Satterthwaite. Strategy-proofness and Arrow’s conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, 10(2):187–217, 1975.
- [71] Sebastian Schneckenburger, Britta Dorn, and Ulle Endriss. Minimising inequality in multiagent resource allocation: Analysis of a distributed approach. Preprint, 2018.
- [72] Sebastian Schneckenburger, Britta Dorn, and Ulle Endriss. The Atkinson inequality index in multiagent resource allocation. In *Proceedings of the 16th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS-2017)*. IFAAMAS, 2017.
- [73] Amartya Sen. *On Economic Inequality*. Oxford University Press, 1973.
- [74] Piotr Skowron, Piotr Faliszewski, and Arkadii M. Slinko. Achieving fully proportional representation: Approximability results. *Artificial Intelligence*, 222:67–103, 2015.
- [75] Hugo Steinhaus. Sur la division pragmatique. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 17:315–319, 1949.
- [76] Andrew C. Yao. Some complexity questions related to distributed computing. In *Proc. 11th STOC*, pages 209–213, 1979.
- [77] William S. Zwicker. Introduction to the theory of voting. In F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang, and A. D. Procaccia, editors, *Handbook of Computational*

Social Choice, chapter 2. Cambridge University Press, 2016.

Abbildungsverzeichnis

3.1. Die Matrix P	35
4.1. Zusammenhänge der Lösungskonzepte	42
4.2. Flussdiagramm	51
5.1. Tools	59
5.2. Visualisierung von Beispiel 10.	61

Tabellenverzeichnis

4.1. Vergleich von zu SGASP verwandten Modellen.	46
4.2. Ausgewählte Ergebnisse der Komplexitätsanalyse	48
5.1. Entscheidungsprobleme in Tool Auctions	60
5.2. Resultate der Komplexitätsanalyse in Tool Auctions	63
5.3. Tabellarische Darstellung des Vergleichs zu Fionda und Greco [39] .	66
5.5. Resultate der parametrisierten Komplexitätsanalyse in Tool Auctions	67
6.1. Tabellarische Darstellung von Beispiel 12	77
6.2. Anteil problematischer Instanzen an simulierten Finaulausgängen .	79
6.3. Axiome im Kontext kombinierter Wettkämpfe	81
A.1. Tabellarische Darstellung von Beispiel 13	107
A.2. Tabellarische Darstellung von Beispiel 14	112
A.3. Extraglossar s-GASP	117
A.4. Relative Effekte einer Manipulation auf die Scores	122

Teil IV.

Appendix und Publikationen

A. Appendix

A.1. Algorithmik und Komplexitätstheorie

Gegeben sei ein beliebiges Problem der Sozialwahltheorie. Die Aufgabe ist es, für dieses Problem gute Lösungen¹ zu finden. Die Sozialwahltheorie beschäftigt sich mit der Existenz guter Lösungen bzw. mit den entsprechenden hinreichenden und notwendigen Bedingungen. In ComSoC betrachten wir das Problem dann aus Sicht der Algorithmik und der Komplexitätstheorie. Die Algorithmik beschäftigt sich damit, möglichst effiziente Algorithmen zu kreieren, die gute Lösungen finden. Die Komplexitätstheorie untersucht die Frage, ob es überhaupt effiziente Algorithmen geben kann, die gute Lösungen finden. Algorithmik und Komplexitätstheorie beschäftigen sich also beide mit der rechnerischen Komplexität des Problems, wobei ihre Ansätze komplementär zueinander sind. Eine ausführliche Einleitung zum Thema Komplexitätstheorie und Algorithmik würde den Rahmen dieser Dissertation sprengen. Wir beschränken uns auf eine kurze, zu großen Teilen informelle Einführung der wichtigsten Begriffe und Konzepte. Eine grundlegende Übersicht zum Thema Komplexitätstheorie bietet das Standardwerk von Garey und Johnson [45]. Eine gute Einführung in das Thema, speziell aus der Sicht von ComSoC, findet sich im Buch von Rothe et al. [68]. Den Abschnitt *Ein Exkurs in die Komplexitätstheorie* [68, 1.5] übernehmen wir in folgendem Absatz inhaltlich.

Wir beginnen mit der Definition der beiden wichtigen Problemklassen P und NP: Informell ist P die Klasse aller Probleme, die sich *effizient* lösen lassen. Hierbei versteht man unter effizient, dass es deterministische Algorithmen gibt, die das Problem lösen und deren Laufzeit in Abhängigkeit von der Größe der Instanzen des Problems nur polynomiell wächst. Die Klasse NP wiederum ist die Klasse aller Probleme, deren Lösungen sich effizient überprüfen lassen. Es gilt $P \subseteq NP$. Ob diese Inklusion echt oder nicht echt ist, ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt² nach wie vor ungelöst. Die Aussage $P \neq NP$ würde implizieren, dass es Probleme gibt, die sich nicht effizient lösen lassen, deren Lösungen sich aber effizient überprüfen lassen. Zur Analyse der Komplexität von Problemen aus NP hat sich das Konzept der NP-Schwere (engl. NP-hardness) bewährt. Ein bestimmtes Problem `PROB` ist NP-schwer (kurz NP-s), wenn wir alle Probleme aus NP mittels einer sogenannten Polynomialzeitreduktion in das Problem `PROB` umwandeln können. Es ist damit mindestens so schwer wie alle Probleme

¹Gute Lösungen in der Sozialwahltheorie werden je nach Kontext durch Fairness-, Effizienz- oder Stabilitätskriterien charakterisiert, vgl. hierzu den Unterabschnitt 1.1.4 der Einleitung.

²Stand 6. März 2019.

aus NP, da dann aus einem effizienten Lösungsalgorithmus von `PROB` für jedes Problem in NP ein ebenfalls effizienter Lösungsalgorithmus konstruiert werden könnte. Ist ein Problem in NP und gleichzeitig NP-schwer, so wird es als NP-vollständig (engl. *NP-complete*, kurz NP-v) bezeichnet. Das klassische Beispiel für ein NP-v Problem ist das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik `SATISFIABILITY` (`SAT`) (A.1.1: Problem 1). Dieses Problem ist nach dem Satz von Cook (1971) NP-vollständig, insbesondere ist damit die Existenz NP-vollständiger Probleme gezeigt. Unsere Werke arbeiten mit der Annahme, dass $P \neq NP$ zutrifft. Dies würde implizieren, dass alle NP-schweren Probleme nicht effizient lösbar sind. Zu der Frage, ob $P \neq NP$ gilt, soll hier aber explizit keine Stellung bezogen werden. Wir verweisen auf folgendes Zitat aus dem Buch von Garey und Johnson [45, S. 14], das nach wie vor Gültigkeit hat:

“The question of whether or not the NP-complete problems are intractable is now considered to be one of the foremost open questions of contemporary mathematics and computer science. Despite the willingness of most researchers to conjecture that the NP-complete problems are all intractable, little progress has yet been made toward establishing either a proof or a disproof of this far-reaching conjecture. However, even without a proof that NP-completeness implies intractability, the knowledge that a problem is NP-complete suggests, at the very least, that a major breakthrough will be needed to solve it with a polynomial time algorithm.”

— Garey und Johnson (1979),
Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness

Haben wir nun von einem Problem herausgefunden, dass es NP-schwer ist, heißt dies noch nicht, dass dieses Problem sich in der Praxis nicht doch zufriedenstellend bearbeiten lässt. In unseren Publikationen werden hier drei Strategien verfolgt: Heuristiken, die Identifizierung effizient lösbarer Spezialfälle und eine Analyse der parametrisierten Komplexität.

1. Heuristiken sind Algorithmen, die zwar nicht die (optimalen) Lösungen für Probleme finden, aber in der Praxis effizient gute Lösungen berechnen. Der *dezentralisierte* Ansatz aus der Publikation *The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation* [72] lässt sich dieser Strategie zuordnen.
2. Bei der Identifizierung effizient lösbarer Spezialfälle versucht man, Beschränkungen des allgemeinen Problems zu identifizieren, die das entsprechende Problem doch effizient lösbar machen. Der englische Fachbegriff hierfür lautet *tractability islands*. Diese Strategie verfolgen wir in den Arbeiten zu *Simplified Group Activity Selection* [22, 23] und in der Publikation *Tool Auctions* [25].

A. Appendix

3. In der parametrisierten Komplexitätstheorie versucht man diejenigen Parameter von Probleminstanzen zu identifizieren, von denen die rechnerische Komplexität im Wesentlichen abhängt. Das bedeutet, dass das Problem eingeschränkt auf Instanzen, bei denen dieser Parameter klein ist, effizient lösbar ist. Diesen Ansatz betrachten wir in der Arbeit *Tool Auctions* [25].

Weitere erwähnenswerte Strategien sind randomisierte Algorithmen oder Approximation, beide Ansätze spielen für dieses Promotionsprojekt jedoch keine Rolle.³

In unseren Arbeiten tauchen zwei weitere Komplexitätsklassen der klassischen Komplexitätstheorie auf. Die Klasse $PSPACE$ beinhaltet alle Probleme die mit polynomiellen Speicherplatz gelöst werden können. Die Klasse $co-NP$ beinhaltet alle *komplementären* Probleme von NP . Dies bedeutet, dass Beweise dafür, dass solche Probleme nicht in NP liegen, in polynomieller Zeit überprüft werden können. Die Konzepte der $PSPACE$ -Schwere und -Vollständigkeit (bzw. der $co-NP$ -Schwere und -Vollständigkeit) sind analog zu den Konzepten NP -Schwere und -Vollständigkeit definiert. Sowohl $PSPACE$ -schwere und $co-NP$ -schwere Probleme sind vermutlich nicht effizient lösbar, insbesondere gilt $NP \subseteq PSPACE$.

Aus der parametrisierten Komplexitätstheorie tauchen drei Klassen von Problemen in der Publikation *Tool Auctions* [25] auf: FPT , $W[1]$ und $W[2]$. Ein Problem mit der Eingabegröße n ist bezüglich einer Parameter mit der Größe k in der Klasse FPT^k , falls es einen Lösungsalgorithmus für das Problem gibt, dessen Laufzeit in $O(f(k) \cdot p(n))$ liegt. Dabei ist p ein (beliebiges) Polynom, während die einzige Forderung an f nur die Berechenbarkeit dieser Funktion ist. Das bedeutet, dass die Laufzeit des Algorithmus polynomiell von der Größe der Eingabe abhängt und sich nur bezüglich der Größe des Parameters exponentiell oder schlimmer verhalten könnte. Hierbei ist also nicht nur interessant, ob es Parameter gibt, bezüglich derer das Problem in FPT ist, sondern auch ob dieser Parameter in der Praxis realistischerweise klein ist. Eine präzise Definition und Einordnung der Klassen $W[1]$ und $W[2]$ würde hier zu weit führen. Für uns ist Folgendes relevant: Die Unterscheidung von Problemen, die sicher in FPT sind, und von $W[1]$ -schweren Problemen markiert die Grenze zwischen effizient lösbaren und vermutlich nicht effizient lösbaren Problemen.⁵ So gibt es

³Bei randomisierten Algorithmen sind die gefundenen Lösungen mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit gut; Approximationsalgorithmen wiederum nähern eine optimale Lösung bis zu einem bestimmten Grade an.

⁴Abgeleitet von „fest-Parameter-handhabbar“ (engl. *fixed-parameter tractable*).

⁵Dieser Satz gilt unter der impliziten Annahme, dass die entsprechenden Parameter klein sind. Durch

vermutlich für alle $W[1]$ -schweren Probleme keine Lösungsalgorithmen mit der Laufzeit $O(f(k) \cdot p(n))$. Diese Grundannahme der parametrisierten Komplexitätstheorie ist analog zu dem Gegensatz P vs. NP-schwer der klassischen Komplexitätstheorie. Weiterhin gilt $FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2]$ und die Tatsache, dass jedes $W[2]$ -schwere Problem auch $W[1]$ -schwer ist. Tiefere Einblicke in die parametrisierte Komplexitätstheorie bieten die Werke von Niedermeier [62], Flum und Grohe [41] sowie Downey und Fellows [26, 27].

A.1.1. Ausgewählte relevante Entscheidungsprobleme

Auf einige kombinatorische Probleme nehmen wir im Rahmen dieser Arbeit wiederholt Bezug. Wir führen sie hier kompakt auf.

Die folgenden Probleme finden sich im Buch von Garey und Johnson [45] und sind jeweils NP-vollständig. Sie sind hier als *Entscheidungsproblem* formuliert, d. h. sie sind so gestellt, dass die Antwort auf die jeweilige Frage entweder ja oder nein lautet.⁶

Problem 1. SAT

SATISFIABILITY (SAT)

Instanz : Eine boolesche Formel φ .

Frage : Gibt es eine Belegung der Variablen von φ , die φ wahr macht?

Kommentar: SAT gilt als das „erste“ NP-vollständige Problem, siehe hierzu den Abschnitt 2.6 über *Cook's Theorem* im Buch von Garey und Johnson [45]. Wir haben hier die Darstellung von Rothe et al. [68] übernommen.

Problem 2. PARTITION

PARTITION

Instanz : Eine endliche Menge X und eine Funktion $s: X \rightarrow \mathbb{N}_0$.

Frage : Gibt es eine Teilmenge $X' \subseteq X$, sodass $\sum_{x \in X'} s(x) = \sum_{x \in (X \setminus X')} s(x)$?

einen Lösungsalgorithmus der Laufzeit $\Theta(2^k \cdot p(n))$ (d. h. die Laufzeit verhält sich bezüglich des Parameters k höchstens, aber insbesondere auch mindestens, exponentiell) haben wir in der Praxis nichts gewonnen, falls der Parameter normalerweise große Werte (z. B. größer 100) annimmt.

⁶Die Komplexitätstheorie betrachtet aus praktischen Gründen – vor allem um eine einheitliche formale Problemstruktur zu haben – nur Entscheidungsprobleme. Dies stellt aber keine Einschränkung der analysierbaren Probleme dar, siehe das Buch von Garey und Johnson [45].

Problem 3. 3-PARTITION

3-PARTITION

- Instanz : Eine Menge X mit $3q$ Elementen, eine Schranke $T \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und eine Funktion $s: X \rightarrow \mathbb{N}_0$, sodass $T/4 < s(x) < T/2$ und $\sum_{x \in X} s(x) = qT$.
- Frage : Kann X in q disjunkte Mengen X_1, \dots, X_q partitioniert werden, sodass für $1 \leq i \leq q$ jeweils $\sum_{x \in X_i} s(x) = T$ gilt?
-

Kommentar: Man beachte, dass in den gesuchten Partitionen von X jedes X_i deswegen genau drei Elemente aus X beinhalten muss. Das Problem 3-PARTITION ist sogar *stark NP-schwer*, d. h. unter der Annahme $P \neq NP$ gibt es keinen pseudo-polynomiellen Algorithmus, der dieses Entscheidungsproblem löst (siehe hierzu Kapitel 4.2 im Buch von Garey und Johnson [45]).

Problem 4. X3C

EXACT COVER BY 3-SETS (X3C)

- Instanz : Eine Menge X mit $3q$ Elementen und eine Familie C von dreielementigen Teilmengen von X .
- Frage : Ist in C eine *exakte Überdeckung* (engl. *exact cover*) von X enthalten, das heißt eine Teilfamilie $C' \subseteq C$, sodass jedes Element von X in (nur) genau einem Mitglied von C' enthalten ist?
-

Kommentar: Das Problem X3C auch NP-schwer falls jedes Element von X in genau drei Mitgliedern von C enthalten ist.

Das folgende Problem ist in Polynomialzeit lösbar. Es findet sich im Buch von Ahuja et al. [1]. (Für in Polynomialzeit lösbare Probleme entfällt die formale Notwendigkeit der Formulierung als Entscheidungsproblem, dementsprechend notieren wir hier die *Aufgabe* direkt.)

Problem 5. MAXFLOW

MAX INTEGER FLOW WITH UPPER BOUNDS (MAXFLOW)

Instanz : Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Kapazität $u(e) \in \mathbb{N}$ für jedes $e \in E$ und zwei ausgezeichnete Knoten s (Startknoten) und t (Zielknoten) .

Aufgabe : Maximiere v , sodass ein $x: E \rightarrow \mathbb{N}$ existiert welches erfüllt, dass $0 \leq x_{i,j} \leq u(i, j)$ und

$$\sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{i,j} - \sum_{\{j:(j,i) \in E\}} x_{i,j} = \begin{cases} v & \text{für } i = s, \\ 0 & \text{für alle } i \in V \setminus \{s, t\} \text{ und} \\ -v & \text{für } i = t. \end{cases}$$

Kommentar: Diese Problem gehört zu den sogenannten *Netzwerkflussproblemen*.

Man nennt $x = \{x_{i,j}\}$ einen Fluss (engl. *flow*) und eine Lösung (d. h. einen Fluss der v maximiert) einen maximalen Fluss.

A.1.2. Reduktion von 3-Partition auf Perfect Index Optimisation

Der Inhalt dieses Absatzes ist der (bisher unveröffentlichten) Journalversion [71] der Publikation *The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation* [72] entnommen.

Als Beispiel für eine Polynomialzeitreduktion eines ComSoC-Problems von einem NP-schweren Problem zeigen wir die Reduktion vom Problem 3-PARTITION auf das Problem PERFECT INDEX OPTIMISATION (PIO). Wir definieren hier das Problem PIO in Bezug auf den Atkinson-Index \mathcal{I} , die Aussage gilt aber für alle Funktionen, die egalitäre von nicht egalitären Allokationen unterscheiden können (vgl. Abschnitt 3.2.1).

Problem 6. PIO

PERFECT INDEX OPTIMISATION (PIO)

Instanz : Ein MARA-Szenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$.

Frage : Gibt es eine Allokation A , sodass $\mathcal{I}(A) = 0$?

A. Appendix

Dieses Entscheidungsproblem ist NP-vollständig. Für eine gegebene Lösung A lässt sich direkt (und effizient) nachprüfen, ob $\mathcal{I}(A) = 0$ gilt. Demzufolge ist PIO in NP. Proposition 2 zeigt, dass PIO NP-schwer ist.

Proposition 2. *Das Entscheidungsproblem PIO ist NP-schwer, selbst für Szenarien mit additiven und symmetrischen Nutzenfunktionen.*

Beweis. Als erstes sei an die Aussage von Lemma 1 (Kapitel 3) erinnert. Diese besagt, dass $\mathcal{I}(A) = 0$ genau dann, wenn alle Agenten denselben Nutzen erhalten. Wir verwenden zum Nachweis der NP-Schwere eine Reduktion vom NP-vollständigen Problem 3-PARTITION (A.1.1: Problem 2).

Es sei also eine Instanz $\langle X, T, s \rangle$ von 3-PARTITION gegeben, wir konstruieren hieraus eine Instanz $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ von PIO. Die Agentenmenge sei $\mathcal{N} = \{1, \dots, q\}$ und die Menge der Güter entspreche der zu partitionierenden Menge X , d. h. $\mathcal{G} = X$. Die Familie \mathcal{U} der Nutzenfunktionen sei wie folgt definiert: Der Nutzen von einelementigen Gütermengen sei direkt durch die Funktion s gegeben, d. h. $u_i(\{x\}) = s(x)$ für alle $x \in X$ und $i \in \mathcal{N}$; für beliebige Mengen in \mathcal{G} sei der Nutzen $u_i(B) = \sum_{x \in B} s(x)$ für alle Bündel (Teilmengen) $B \subseteq \mathcal{G} = X$ und $i \in \mathcal{N}$. Dieses Szenario hat nach Konstruktion additive und symmetrische Nutzenfunktionen. Wir müssen zeigen, dass $\langle X, T, s \rangle$ eine Ja-Instanz ist genau dann, wenn $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ eine Ja-Instanz ist.⁷

Sei also $\langle X, T, s \rangle$ eine Ja-Instanz mit der Partition X_1, \dots, X_q von X , dann ordnen wir jedem Agenten $i \in \mathcal{N}$ die Güter zu, die mit den Elementen in der Menge X_i korrespondieren. Da $\sum_{x \in X_i} s(x) = T$ für alle $i \in \{1, \dots, q\}$ gilt, erhalten alle Agenten denselben Nutzen und somit gilt für die so konstruierte Allokation A , dass $\mathcal{I}(A) = 0$.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass eine Allokation A der Güter mit $\mathcal{I}(A) = 0$ existiere. Nach Lemma 1 (siehe Kapitel 3), bedeutet dies, dass jeder Agenten denselben Nutzen $\mu(A)$ durch die ihm von A zugewiesenen Güter erhält.⁸ Für $i \in \mathcal{N}$, sei B_i das Bündel, welches i von A zugeordnet wird. Nun setzen wir $X_i = B_i$ für alle $i \in \mathcal{N}$ und erhalten $\mu(A) = u_i(A) = \sum_{x \in B_i} u_i(x) = \sum_{x \in X_i} s(x) = T$. Somit existiert wie gefordert ein Partition von X mit den geforderten Eigenschaften. \square

⁷Eine *Ja-Instanz* (bzw. *Nein-Instanz*) eines Entscheidungsproblems ist eine Instanz zu der die Antwort auf die jeweilige Frage ja (bzw. nein) lautet.

⁸Das arithmetische Mittel aller erhaltenen Nutzen unter eine Allokation bezeichnen wir mit $\mu(A)$, das heißt $\mu(A) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)$.

A.2. Appendix zu Kapitel 3 (The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation)

A.2.1. Beispiel zu sw_{util} und sw_{nash}

Beispiel 13. Gegeben sei das Szenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ mit $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{G} = \{a, b, c, d\}$. Die Nutzenfunktionen u_1, u_2 und u_3 in \mathcal{U} sind normalisiert und additiv, d.h. es gilt für $i = 1, 2, 3$ jeweils $u_i(\emptyset) = 0$ und $u_i(B) = \sum_{b \in B} u_i(\{b\})$. Die Werte der Nutzenfunktionen für Mengen der Form $\{b\}$ („Einzelgüter“) sind in der Tabelle A.1a als Matrix aufgelistet. Wir betrachten die drei Allokation $A^{(0)}, A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ sowie die dazugehörigen Nutzenvektoren, wie sie in Tabelle A.1b beschrieben sind. Die Allokation $A^{(0)}$ hat den Nutzenvektor $(3, 2, 2)$, sie ist sowohl im Sinne der *utilitaristischen sozialen Wohlfahrt* ($sw_{util}(A^{(0)}) = 7$) als der der *sozialen Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt* ($sw_{nash}(A^{(0)}) = 12$) nicht sehr effizient. Es gilt $sw_{util}(A^{(1)}) = sw_{util}(A^{(2)})$, da $sw_{util}(A^{(1)}) = (3 + 4) + 5 + 3 = 15$ und $sw_{util}(A^{(2)}) = 4 + 5 + (3 + 3) = 15$. Die Allokationen $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ sind also gleich effizient im Sinne von sw_{util} . Bezüglich sw_{nash} übertrifft aber die Effizienz der Allokation $A^{(2)}$ mit $sw_{nash}(A^{(2)}) = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ die der Effizienz der Allokation $A^{(1)}$ mit $sw_{nash}(A^{(1)}) = 7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$. An diesem Beispiel sieht man, dass die sozialen Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt kein reines Effizienzkriterium ist, sondern auch Fairnessaspekte beinhaltet.⁹

Tabelle A.1.: Tabellarische Darstellung von Beispiel 13. (Eigene Darstellung)

\mathcal{U}	a	b	c	d		$A^{(0)}$	$A^{(1)}$	$A^{(2)}$
1 :	2	1	3	4	1 :	$\{a, b\}$	$\{c, d\}$	$\{d\}$
2 :	2	5	2	1	2 :	$\{d\}$	$\{b\}$	$\{b\}$
3 :	3	2	3	2	3 :	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$
u :					u :	$(3, 2, 2)$	$(7, 5, 3)$	$(4, 5, 6)$
sw_{util} :					sw_{util} :	7	15	15
sw_{nash} :					sw_{nash} :	12	105	120

a) Die Werte der additiven Nutzenfunktionen in \mathcal{U} für die Einzelgüter aus Beispiel 13

b) Die Allokationen aus Beispiel 13 sowie die dazugehörigen Nutzenvektoren und Werte von sw_{util} und sw_{nash} .

⁹Insbesondere erfüllt es das Transferprinzip, welches im Unterabschnitt A.2.3 erläutert wird. Ausführlicher auf diese Fairnessaspekte wird in der Publikation von Caragiannis et al. [14] eingegangen.

A.2.2. Beispiel einer kombinatorische Konstruktion für eine Worst-Case-Analyse des dezentralisierten Ansatzes.

Lemma 3 (Ramezani und Endriss [34]). *Es gibt MARA-Instanzen $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$, sodass für zwei Allokationen A, A' (mit $A \neq A'$) stets $sw_{\text{nash}}(A) \neq sw_{\text{nash}}(A')$ gilt. Die soziale Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt nimmt also $|\mathcal{N}|^{|\mathcal{G}|}$ unterschiedliche Werte an.*

Beweis. Es seien \mathcal{N} und \mathcal{G} gegeben, wir konstruieren ein passendes \mathcal{U} . Dazu assoziieren wir jeden Agenten i mit einer Primzahl p_i , sodass $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ gilt. Sei nun (B_1, \dots, B_{2^m}) eine beliebige aber feste Auflistung der 2^m Bündel in der Potenzmenge der Gütermenge \mathcal{G} . Dann definieren wir für jeden Agenten i und jedes Bündel B_k den Nutzen über $u_i(B_k) := p_i^k$. Gilt nun für zwei Allokationen A, A' , dass $sw_{\text{nash}}(A) = \prod_i u_i(A) = \prod_i u_i(A') = sw_{\text{nash}}(A')$ gilt, so folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, dass bereits A gleich A' . \square

A.2.3. Weiterführende Erläuterungen zu Ungleichverteilungsmaßen

Was die kollektiven Nutzenfunktionen für Effizienzkriterien sind, sind die Ungleichverteilungsmaße für Ungleichheit, formal Funktionen $I: \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow [0, 1]$ (Wir verwenden den Buchstaben I aufgrund des gängigen englischen Fachausdrucks *inequality indices* für Ungleichverteilungsmaße). Wobei wir in MARA die Vektoren in $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ als Nutzenvektoren von Allokationen in Szenarien mit n Agenten auffassen und bei gegebenen Szenarien oft die Allokationen als die Variablen auffassen, wir schreiben dementsprechend $I(A)$ wo mathematisch exakt eigentlich $I(\mathbf{u}(A))$ stehen müsste. An Ungleichverteilungsmaße werden Anforderungen auf Grundlage von normativen Forderungen gestellt, diese sind nicht einheitlich festgelegt und teilweise umstritten, hierzu bietet die Publikation von Allison [2] einen Einblick. Als Grundannahme ist jedoch stets der Funktionswert 0 mit „perfekt gleichen“ Allokationen (bzw. Nutzen- oder Einkommensverteilungen) verknüpft. Ebenfalls unstrittig ist, dass im Vergleich höhere Funktionswerte mehr Ungleichheit anzeigen sollen. Bekannte Beispiele für Ungleichverteilungsmaße sind der *Gini-Index* (Gini [47]), der *Robin-Hood-Index*¹⁰ (Kondor [53]) und die Familie der *Atkinson-Indizes* [7]. Wir beschäftigen uns in der Publikation *The Atkinson Inequality*

¹⁰Der Robin-Hood-Index \mathcal{RH} gibt an wie viel Nutzen (bzw. Einkommen) man insgesamt „den Reichen nehmen und den Armen geben“ müsste um vollständige Nutzen- (bzw. Einkommensgleichverteilung)

Index in Multiagent Resource Allocation [72] mit dem Atkinson-Index \mathcal{I} basierend auf der sozialen Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt

Jeder Atkinson-Index basiert auf einer sozialen Wohlfahrt sw . Man berechnet für einen Nutzenvektor $\mathbf{u}(A)$ einer Allokation A zuerst das sogenannte „Level der äquivalenten Einkommensgleichverteilung“ (engl. *equally distributed equivalent level of income*). Dies ist die Zahl $\mu_{sw}(A)$, sodass für den Vektor $\boldsymbol{\mu}_{sw}(A) = (\mu_{sw}(A), \dots, \mu_{sw}(A))$ gilt, dass $sw(\mathbf{u}(A)) = sw(\boldsymbol{\mu}_{sw}(A))$.¹¹ Der Atkinson-Index beruhend auf sw ist dann definiert als $I_{sw}(A) := 1 - \frac{\mu_{sw}(A)}{\mu(A)}$ (Atkinson [7]).¹² Wir konzentrieren uns hier auf den wichtigsten Vertreter dieser Familie, den Atkinson-Index basierend auf der sozialen Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt sw_{nash} . Dieser ist definiert über

$$I_{nash}(A) = 1 - \frac{\sqrt[n]{sw_{nash}(A)}}{\mu(A)} = 1 - \frac{\sqrt[n]{\prod_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)}}{\frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)},$$

wobei $I_{nash}(A) = 0$ gilt, falls alle Nutzen 0 sind.

In der Literatur wird der Ausdruck *Atkinson-Index* sowohl für die Familie als auch für diesen konkreten Vertreter benutzt. Hier benutzen wir ihn jedoch nur für letzteren und benutzen die kürzere Notation \mathcal{I} anstelle von I_{nash} . Es ist leicht zu sehen, dass \mathcal{I} den Wert 0 annimmt, falls alle Agenten denselben Nutzen erhalten. Darüber hinaus folgt direkt aus der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel, dass er in allen anderen Fällen einen Wert ungleich 0 annimmt.

Lemma (Lemma 1 auf S. 25 / Lemma 1 [72]). *Falls für eine Allokation A gilt, dass $\mathcal{I}(A) = 0$, dann erhalten alle Agenten denselben Nutzen, d. h.,*

$$\mathcal{I}(A) = 0 \implies \forall i \in \mathcal{N} : u_i(A) = \mu(A).$$

Dem Atkinson-Index kommt in der Literatur der Sozialwissenschaften eine hervorgehobene Stellung zu. Andere Ungleichverteilungsmaße, speziell der Gini-Index, werden zwar häufiger verwendet, der Atkinson-Index wird jedoch von vielen Autoren (Atkin-

lung) zu erreichen: Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ gilt $\mathcal{RH}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mu(\mathbf{x})n} \sum_{i=1}^n |x_i - \mu(\mathbf{x})|$. Dieser Index ist unter den verschiedensten Bezeichnungen bekannt (siehe u. a. Kondor [53], Allison [2] und Endriss [31]).

¹¹Dieses $\mu_{sw}(A)$ kann als Verallgemeinerung des Mittelwertes angesehen werden ($\mu_{sw_{uni}}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(A) = \mu(A)$). Im Allgemeinen gibt es in einem gegebenen Szenario keine Allokation, sodass der Vektor $(\mu_{sw}(A), \dots, \mu_{sw}(A))$ dem Nutzenvektor einer Allokation in diesem Szenario entspricht.

¹²Der Grundansatz von Atkinson [7] ist es, dass jedes Ungleichverteilungsmaß I durch die Gleichung $sw = \mu(1 - I)$ eine soziale Wohlfahrt induziert. Er argumentierte dann weiter, dass man die Ungleichverteilungsmaße aufgrund der induzierten sozialen Wohlfahrten beurteilen sollte. Auf dieser Grundlage kritisiert er auch insbesondere den Gini-Index und den Robin-Hood-Index.

A. Appendix

son [7], Sen [73], Allison [2] und Moulin [61]) als das unter normativen Gesichtspunkten zu bevorzugende Ungleichverteilungsmaß angesehen. Die Argumente hierfür beziehen im Wesentlichen auf die Herleitung aus den sozialen Wohlfahrten, in unserem Fall der sozialen Wohlfahrt nach dem Nash-Produkt, die eine profunde axiomatische Basis besitzen.

Darüber hinaus erfüllt der Atkinson-Index die Basisaxiome für Ungleichverteilungsmaße, welche das Transferprinzip, Symmetrie und Skaleninvarianz mit einschließen. Das *Transferprinzip* für Einkommensverteilungen besagt, dass eine Übertragung von Einkommen von einem Agenten, der viel Einkommen hat, zu einem Agenten mit wenig Einkommen die Ungleichheit nicht erhöht, solange dadurch der „ärmere“ der beiden Agenten nicht reicher wird als der vormals Reichere. Übertragen auf MARA besagt das Transferprinzip, dass Deals, welche zu einer Nutzenumverteilung im Sinne der eben beschriebenen Einkommensumverteilung führen, die Ungleichheit nicht erhöhen. Ein Ungleichverteilungsmaß I ist *symmetrisch*, falls $I(\mathbf{u}(A)) = I(p_{\mathbf{u}(A)})$ für jede Permutation $p_{\mathbf{u}(A)}$ des Nutzenvektors $\mathbf{u}(A)$ gilt. *Skaleninvarianz* schließlich bedeutet, dass die Multiplikation aller Nutzen durch eine (positive) Konstante keinen Effekt auf die gemessene Ungleichheit haben sollte. Man vergleiche hierzu das Werk von Allison [2].

Dies waren nun Argumente, warum der Atkinson-Index eine passable Wahl zur Messung von Ungleichheit ist. Folgende Resultate von Atkinson in Bezug auf die sogenannte Lorenz-Kurve ergänzen dies durch relativierende Argumente (relativierend im dem Sinne, dass es nicht *das eine* Ungleichverteilungsmaß geben kann).

Zum Vergleich von Einkommensverteilungen wird oft die Lorenz-Kurve (Lorenz [57] herangezogen. Übertragen auf MARA entspricht die Lorenz-Kurve einer Allokation A dem Vektor $L(A)$ mit der Länge $|\mathcal{N}|$, dessen k -ter Eintrag $L_k(A)$ die Summe der Nutzen der k „ärmsten“ Agenten ist. Liegt für zwei Allokationen A und A' die normierte¹³ Lorenz-Kurve $L^*(A)$ der ersten Allokation stets über der normierten Lorenz-Kurve $L^*(A')$ der anderen Allokation (d. h. $L_k^*(A) \geq L_k^*(A')$), so dominiert die eine Allokation die andere im Sinne der Lorenz-Dominanz¹⁴. Vergleicht man zwei Allokationen (bzw. Verteilungen) bezüglich deren normierten Lorenz-Kurven gibt es zwei interessante Erkenntnisse (siehe Atkinson [7]).

¹³Alle Einträge werden durch den Gesamtnutzen geteilt, somit ist der letzte Eintrag ein normierten Lorenz-Kurve stets 1.

¹⁴Wir verwenden hier den Ausdruck Lorenz-Dominanz wie im Artikel von Allison [2], dieser deckt sich mit den Begriff der *stochastischen Dominanz*. Manche Autoren verwenden den Ausdruck Lorenz-Dominanz in Hinsicht auf die nicht normierten Lorenz-Kurven, man vgl. z. B. Endriss [31].

1. „Schneiden“ sich zwei Lorenz-Kurven, d. h. keine Allokation dominiert die andere im Sinne der Lorenz-Dominanz, so gibt es zwei Ungleichverteilungsmaße, welche beide die drei Basisaxiome erfüllen, aber jeweils der anderen Allokation ein höheres Maß an Ungleichheit zuordnen.
2. Die Ungleichverteilungsmaße, welche die drei Basisaxiome erfüllen, sind genau die Ungleichverteilungsmaße, welche immer der dominanten Allokation im Sinne der Lorenz-Dominanz ein niedrigeres Maß an Ungleichheit zuordnen.

Diese Erkenntnisse werden auch in der Anmerkung zum Beispiel 14 (Appendix A.2.4) verdeutlicht.

Sen [73] argumentiert sogar, dass man nur Verteilungen, bei denen sich die normierten Lorenz-Kurven nicht schneiden, miteinander vergleichen sollte. Alle Verteilungen, bei denen sich die Lorenz-Kurve schneidet, sollten nach dieser Argumentation bezüglich Ungleichheit als unvergleichbar angesehen werden. In den Worten von Allison [2]: “Sen (1973) has suggested that current notions of inequality may be too imprecise for any conventional measure of inequality. In his view, the best we may be able to achieve without exceeding our understanding is partial ordering: for some pairs of distributions we can say that one is more unequal than the other, while for other pairs of distributions we suspend judgement. Such a partial ordering is produced by the criterion of Lorenz dominance discussed in section 4. If one Lorenz curve lies nowhere below and somewhere above another, the first distribution is more equal. For distributions whose Lorenz curves cross, no ranking is possible. Although Sen’s position is extreme, it is worthwhile keeping in mind that the Lorenz dominance criterion is virtually unquestioned. Thus, if a particular hypothesis about inequality can be demonstrated by Lorenz dominance, confidence in the result is greatly strengthened.”

—Allison, *Measures of Inequality* [2]

A.2.4. Keine Konvergenz durch lokale Deals

Beispiel 14. Wir betrachten die zwei Szenarien $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_1 \rangle$ und $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_2 \rangle$. Jeweils ist $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{G} = \{a, b, c, d\}$. Die Nutzenfunktion in \mathcal{U}_1 und \mathcal{U}_2 sind additiv und normalisiert (vgl. Appendix A.2.1) und durch die zwei folgenden Matrizen beschrieben.

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \mathcal{U}_1 & a & b & c & d \\ \hline \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{2} & 2 & 5 & 2 & 1 \\ \mathbf{3} & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|cccc} \mathcal{U}_2 & a & b & c & d \\ \hline \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{2} & 2 & 5 & 2 & 1 \\ \mathbf{3} & 3 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

A. Appendix

Wir betrachten die zwei Allokation A° und A^* , die (zusammen mit den induzierten Nutzenvektoren) in Tabelle A.2a beschrieben sind. Der Deal $\delta = (A^\circ, A^*)$ ist ein Tausch der Güter b und c zwischen den Agenten 1 und 2. Betrachten wir den Deal δ in den zwei Szenarien $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_1 \rangle$ und $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_2 \rangle$, so fällt auf, dass die lokalen Informationen jeweils identisch sind. Der Wert von \mathcal{I} in Szenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_1 \rangle$ nimmt jedoch ab, während er in Szenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_2 \rangle$ zunimmt. Dies wird durch die Rechnung in der Tabelle A.2b gezeigt. Die Existenz eines lokalen Kriteriums ist somit ausgeschlossen.

Tabelle A.2.: Tabellarische Darstellung von Beispiel 14. (In Anlehnung an Schneckenburger et al. [72])

		A°	A^*
1	:	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$
2	:	$\{c\}$	$\{b\}$
3	:	$\{d\}$	$\{d\}$
$\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_1 \rangle$:	$\mathbf{u}(A^\circ) = (3, 2, 6)$	$\mathbf{u}(A^*) = (5, 5, 6)$
$\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_2 \rangle$:	$\mathbf{u}(A^\circ) = (3, 2, 2)$	$\mathbf{u}(A^*) = (5, 5, 2)$

a) Die Allokationen A° und A^* aus Beispiel 14 sowie die induzierten Nutzenvektoren.

	$\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_1 \rangle$	$\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_2 \rangle$
$\mathcal{I}(A^\circ)$	$1 - \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 2 \cdot 6}}{\frac{1}{3} \cdot (3+2+6)} \approx 0.099$	$1 - \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 2 \cdot 2}}{\frac{1}{3} \cdot (3+2+2)} \approx 0.019$
$\mathcal{I}(A^*)$	$1 - \frac{\sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 6}}{\frac{1}{3} \cdot (5+5+6)} \approx 0.004$	$1 - \frac{\sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 2}}{\frac{1}{3} \cdot (5+5+2)} \approx 0.079$

b) Die Werte des Atkinson-Index bezüglich aller Allokationen und Szenarien in Beispiel 14

Anmerkung. Der Vergleich der normierten Lorenz-Kurven für Beispiel 14 ergibt Folgendes:

In Szenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_1 \rangle$ haben wir

	A°	A^*
\mathbf{u}^1	(3, 2, 6)	(5, 5, 6)
L	(2, 5, 11)	(5, 10, 16)
L^*	$\approx (0.18, 0.45, 1.00)$	$\approx (0.31, 0.63, 1.00)$

Wohingegen in Szenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_2 \rangle$ gilt, dass

	A°	A^*
\mathbf{u}^2	(3, 2, 2)	(5, 5, 2)
L	(2, 4, 7)	(2, 7, 12)
L^*	$\approx (0.29, 0.57, 1.00)$	$\approx (0.17, 0.58, 1.00)$

Demzufolge reduziert der Deal δ im ersten Szenario nach jedem Ungleichverteilungsmaß (insbesondere nach dem Atkinson-Index) die Ungleichheit. Im zweiten Szenario erhöht sich jedoch die Ungleichheit gemessen nach dem Atkinson-Index. Da sich hier die Lorenz-Kurven schneiden, könnte man allerdings ein Ungleichverteilungsmaß finden, sodass nach diesem auch der Deal δ im zweiten Szenario sinkt. Man vergleiche die Erkenntnisse von Atkinson (Appendix A.2.3).

A.2.5. Beweis von Theorem 2

Der Inhalt dieses Absatzes ist dem (unveröffentlichten) Journalartikel von Schneckenburger et al. [71] entnommen.

In Kapitel 3 beweisen wir die folgende Proposition.

Proposition 1 (Proposition 1 auf S. 33 / Lemma 7 [72]). *Für jeden nicht unabhängig zerlegbaren Deal δ existieren Nutzenfunktionen und eine Startallokation, sodass δ notwendig ist, um eine Allokation mit minimaler Ungleichheit nach dem Atkinson-Index durch (und nur durch) Atkinson-Deals zu erreichen.*

Die Aussage dieser Proposition gilt jedoch für *alle* Deals, die Beschränkung auf nicht unabhängig zerlegbare Deals ist also nicht notwendig. Also gilt folgendes Theorem.

Theorem (Theorem 2 auf S. 31 / Theorem 8 [72]). *Für jeden Deal δ existieren Nutzenfunktionen und eine Startallokation, sodass δ notwendig ist, um eine Allokation mit minimaler Ungleichheit nach dem Atkinson-Index durch (und nur durch) Atkinson-Deals zu erreichen.*

Für den Beweis von Theorem 2 benötigen wir die folgenden zwei Lemmata.

Lemma 4. *Für beliebiges $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und $1 \leq d \leq n$ ist die Funktion*

$$T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto 1 - \frac{\sqrt[n]{(1-x)^d}}{1 - \frac{x \cdot d}{n}}$$

streng monoton wachsend und somit bijektiv.

A. Appendix

Beweis. Die Funktion ist wohldefiniert und differenzierbar. Weiter gilt $T(0) = 0$ und $T(1) = 1$. Wir berechnen $\frac{d}{dx}T(x)$ für ein beliebiges $x \in [0, 1[$ und sehen

$$\frac{\partial}{\partial x}T(x) = \frac{(n-d)dx(1-x)^{\left(\frac{d}{n}-1\right)}}{(n-dx)^2} > 0,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 5. Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $d, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq d < n$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a \cdot x^d}}{\frac{1}{n}(b + d \cdot x)} = 0$. *Beweis.*

Da $\sqrt[n]{a \cdot x^d} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$ und $\frac{1}{n}(b + d \cdot x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$ dürfen wir hier die Regel von L'Hôpital anwenden:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a \cdot x^d}}{\frac{1}{n}(b + d \cdot x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \left(\sqrt[n]{a \cdot x^d} \right)}{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n}(b + d \cdot x) \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{n} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot x^{\frac{d}{n}-1}}{\frac{d}{n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \cdot x^{\left(\frac{d}{n}-1\right)} \stackrel{d < n}{=} 0. \end{aligned}$$

□

Nun können wir Theorem 2 beweisen:

Beweis von Theorem 2. Für den Fall, dass δ nicht unabhängig zerlegbar ist, ist die Aussage bereits durch Proposition 1 abgedeckt. Nehmen wir also an, dass δ unabhängig zerlegbar ist. In diesem Fall lässt sich stets eine Folge

$$(A = A^1, A^2, \dots, A^d, A^{d+1} = A')$$

von Allokationen finden, sodass: (i) Jedes Paar $(A^\ell, A^{\ell+1})$ von aufeinanderfolgenden Allokationen dieser Folge ist nicht unabhängig zerlegbar und (ii) für zwei beliebige Deals δ_a und δ_b (die jeweils aus einem solchen Paar aufeinanderfolgender Allokationen dieser Folge bestehen) gilt immer, dass $\mathcal{N}^{\delta_a} \cap \mathcal{N}^{\delta_b} = \emptyset$.

So eine Folge lässt sich folgendermaßen auf iterative Weise konstruieren. Wir beginnen mit der Folge (A, A') . Falls ein Paar $(A^\ell, A^{\ell+1})$ von aufeinanderfolgenden Allokationen der gegenwärtigen Folge unabhängig zerlegbar ist, so existiert $A^{\ell'} \notin \{A^\ell, A^{\ell+1}\}$ mit $\mathcal{N}^{(A^\ell, A^{\ell'})} \cap \mathcal{N}^{(A^{\ell'}, A^{\ell+1})} = \emptyset$ und $\mathcal{N}^{(A^\ell, A^{\ell'})} \cup \mathcal{N}^{(A^{\ell'}, A^{\ell+1})} = \mathcal{N}^{(A^\ell, A^{\ell+1})}$; nun ordnen wir diese Allokation $A^{\ell'}$ in der Folge zwischen A^ℓ und $A^{\ell+1}$ ein und nummerieren anschlie-

A.2. The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation

Bestimmen die Allokationen neu durch. Diese Schritte werden solange wiederholt bis die Folge die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Für jedes Paar $(A^\ell, A^{\ell+1})$ wählen wir einen Agenten $j \in \mathcal{N}^{(A^\ell, A^{\ell+1})}$ aus und bezeichnen die Menge all dieser Agenten mit \mathcal{D} (nach Konstruktion kann kein Agent mehrfach ausgewählt werden und es gilt $|\mathcal{D}| = d$).

Es seien x, y reelle Zahlen mit $0 < x < 1 < y$ (die exakten Werte von x und y werden später festgelegt). Die Werte der Nutzenfunktionen legen wir bündelweise folgendermaßen fest:

$$u_i(B) = \begin{cases} y & , \text{ falls } A'(i) = B, \\ 1 & , \text{ falls } (i \notin \mathcal{D}) \text{ und } A(i) = B, \\ 1 - x & , \text{ falls } (i \in \mathcal{D}) \text{ und } A(i) = B, \\ i + 1 & , \text{ sonst .} \end{cases}$$

Analog zur Konstruktion im Beweis von Proposition 1 gilt $\mathcal{I}(A') = 0$ und

$$\mathcal{I}(A) = 1 - \frac{\sqrt[n]{(1-x)^d}}{1 - \frac{x \cdot d}{n}}.$$

Wir unterscheiden im Folgenden drei verschiedenen Typen von Allokationen (abgesehen von A und A') in Bezug auf die ausgewählten Agenten $j \in \mathcal{D}$: Allokationen des ersten Typs stimmen für manche Agenten $j \in \mathcal{D}$ mit A überein sowie für keinen Agenten $i \in \mathcal{N}$ mit A' ; Allokationen des zweiten Typs stimmen für keinen der Agenten $j \in \mathcal{D}$ mit A überein sowie für keinen Agenten $i \in \mathcal{N}$ mit A' ; der dritte Typ von Allokationen umfasst alle Allokationen, die für manche Agenten mit A' übereinstimmen. Mit Sicht auf die Variable bedeutet dies Folgendes: In Typ 1 tritt die Variable x auf, aber nicht die Variable y ; in Typ 2 treten keine Variablen auf; in Typ 3 tritt die Variable y auf.

Wir betrachten zunächst die Allokationen des ersten Typs, die wir jeweils mit \tilde{A} kennzeichnen. Es gelte also $\tilde{A}(j) \neq A'(j)$ für alle $j \in \mathcal{D}$ und $\tilde{A} \neq A$ aber $\tilde{A}(j) = A(j)$ für manche $j \in \mathcal{D}$. Analog zum Beweis von Proposition 1 lässt sich zeigen, dass es ein $\varepsilon_1 > 0$ gibt, sodass $0 < \varepsilon_1 < \mathcal{I}(\tilde{A})$ für alle möglichen Werte von x .

Nun zu den Allokationen des zweiten Typs, jeweils mit A^* gekennzeichnet. Es gelte also $A^*(i) \neq A'(i)$ für alle $i \in \mathcal{N}$ und $A^*(j) \neq A(j)$ für alle $j \in \mathcal{D}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{I}(A^*) > 0$. Es gibt mindestens ein Paar von Agenten k, l mit $u_k(A^*(k)) \neq u_l(A^*(l))$, dies impliziert nach Lemma 1, dass $\mathcal{I}(A^*) \neq 0$. Da es nur endlich viele Allokationen gibt

A. Appendix

(und in keinem der induzierten Nutzenvektoren eine der Variablen x oder y auftaucht), erhalten wir $\min_{A^* \neq A, A'} \mathcal{I}(A^*) > 0$. Wir wählen nun ein ε_2 mit $0 < \varepsilon_2 < \min_{A^* \neq A, A'} \mathcal{I}(A^*)$ aus und legen den Wert für x so fest, dass $\mathcal{I}(A) = \varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, was nach Lemma 4 möglich ist. Somit ergibt sich $0 = \mathcal{I}(A') < \mathcal{I}(A) < \mathcal{I}(A^*)$.

Als letztes betrachten wir die Allokationen des dritten Typs, jeweils mit A° gekennzeichnet, bei denen manche – aber nicht alle – Agenten dasselbe Bündel wie in der Allokation A' erhalten. Für jede solche Allokation A° gilt

$$\mathcal{I}(A^\circ) = 1 - \frac{\sqrt[n]{y^{d'} \cdot \prod_{i=1}^{n-d'} t_i}}{\frac{1}{n}(y \cdot d' + \sum_{i=1}^{n-d'} t_i)}$$

für entsprechende (feste) $1 < d' < d$ und $t_i > 0$, (man beachte, dass für einige i gelten kann, dass $t_i = 1 - x$, der Wert für x jetzt aber fixiert ist). Nach Lemma 5 konvergiert dieser Term für y gegen unendlich zu 1 und deswegen lässt sich y so festlegen, dass $\mathcal{I}(A^\circ) > \varepsilon = \mathcal{I}(A)$.

In dem so konstruierten Szenario ist bei gegebener Allokation A der Deal (A, A') der einzige, der die Ungleichheit gemessen nach dem Atkinson-Index \mathcal{I} reduziert. \square

A.3. Simplified Group Activity Selection

In diesem Abschnitt erläutern wir die Unterschiede zwischen s-GASP und GASP.

Im Modell GASP eingeführt von Darmann et al. [20] gibt es keine Restriktionen für die Lösungen, die Präferenzen sind hier jedoch über $A^* \times \{1, \dots, n\} \cup a_0$ anstatt über A . Das Wort „*Simplified*“ in Simplified Group Activity Selection Problem kann missverstanden werden. So ist s-GASP kein direkter Spezialfall von GASP: Zum einen gibt es in GASP keine Unterscheidung zwischen zulässigen und nicht zulässigen Zuordnungen, zum anderen sind die verschiedenen Lösungskonzepte nicht konsistent definiert. Die verwendeten Bezeichnungen sind in Tabelle A.3 übersichtlich aufgeführt.

Tabelle A.3.: Glossar zu den verwendeten Begriffen in Kapitel 4. Die Spalte *s-GASP* enthält die in den Publikationen Darmann et al. [22, 23] verwendeten Begriffe. Die Spalte *Analoga GASP* bezieht sich auf den Artikel von Darmann und Lang [24], das Konzept *contractually* wird hier allerdings nicht auf core stable angewendet. Unter „contractually c.s.“ und „contractually s.c.s.“ verstehen wir die logische Anwendung des Konzeptes auf core-stabile und strikt core-stabile Zuordnungen. (Eigene Darstellung)

Kürzel	Dissertation	s-GASP	Analoga in GASP
z / f	zulässig	feasible	-
ir	individuell rational	individually rational	individually rational
nf / ef	neidfrei	envy-free	envy-free
po	Pareto-optimal	Pareto optimal	Pareto optimal
stabil	is	individuell stabil	contractually i.s.
	cs	core-stabil	- / „contractually c.s.“
	scs	strikt core-stabil	- / „contractually s.c.s.“
virtuell stabil	vis	virtuell individuell stabil	individually stable
	vcs	virtuell core-stabil	core stable
	vscs	virtuell strikt core-stabil	strictly core stable
-	Nullaktivität	void activity	-

Unproblematisch sind in Hinsicht auf die Inkonsistenzen die alternativen Begriffsbezeichnungen (*virtually* vs. *contractually*). Ein relevanter Unterschied ist jedoch, dass in GASP bei jeder Variante von Stabilität die individuelle Rationalität vorausgesetzt wird, in s-GASP jedoch nicht. Eine alternative Begriffsverwendung für Stabilitätskriterien im allgemeinen „Group Activity Selection Problems“-Rahmen findet man im Artikel von Darmann und Lang [24], wo die Begriffe *contractually stable* und *stable* verwendet

A. Appendix

werden. Hierbei entspricht unser *stabil* dem *contractually stable* und unser *virtuell stabil* wiederum *stable*. Die Intention hinter den Begriffen ist, dass durch eine bestehende Zuordnung ein „Vertrag“ zwischen allen Agenten, die zu derselben Aktivität zugeordnet wurden, geschlossen wird. Der Vertrag legt fest, dass Agenten nur dann die Aktivität verlassen dürfen, wenn dadurch die untere Schranke der Teilnehmerzahlen nicht verletzt wird. Diese Unterscheidung zwischen *stable* und *contractually stable* ist von den entsprechenden Begriffen für Hedonic Games abgeleitet, man vergleiche den Artikel von Aziz und Savani [8].

Ignorieren wir die technischen Feinheiten der Lösungskonzepte, so sieht die Einbettung von s-GASP nach GASP wie folgt aus. Gegeben sei eine Instanz (N, A, P, R) von s-GASP, wir konstruieren hieraus eine Instanz (N, A, P') von GASP. Die Agenten- und die Aktivitätenmenge übernehmen wir dabei direkt. Die Präferenzen P^* konstruieren wir anhand von P und R . Für ein $\succsim \in \mathcal{W}(A)$ müssen wir ein $\triangleright \in \mathcal{W}(A^* \times \{1, \dots, n\} \cup a_\emptyset)$ konstruieren. Analog zur Verwendung der Symbole \succsim, \succ und \sim kennzeichnet \triangleright den asymmetrischen Teil von \triangleright und \approx den symmetrischen. Wir identifizieren jede echte Aktivität a mit der Menge $(a, [\ell(a), u(a)]) := \{(a, s) : \ell(a) \leq s \leq u(a)\}$. Die Elemente in $A^* \times \{1, \dots, n\}$, die nicht in einer dieser $|A^*|$ Mengen liegen, bezeichnen wir als *nicht zulässige* Elemente und kennzeichnen die Menge dieser Elemente mit NZ , es ist $NZ = \{(a, s) : a \in A^*, s < \ell(a) \text{ oder } s > u(a)\}$.

Wir konstruieren \triangleright anhand der folgenden Regeln:

- Für alle $s, t \in [\ell(a), u(a)]$ und $a \in A^*$ gilt $(a, s) \approx (a, t)$.
- Für alle $(x, s), (y, t) \in NZ$ gilt $(x, s) \approx (y, t)$.
- Für alle $(a, t) \notin NZ$ und $(x, s) \in NZ$ gilt $(a, t) \triangleright (x, s)$.
- Für alle $(x, s) \in NZ$ gilt $a_\emptyset \triangleright (x, s)$.
- Für alle $a, b \in A^*$ und $s \in [\ell(a), u(a)] \cap [\ell(b), u(b)]$ gilt

$$a \succ b \Leftrightarrow (a, s) \triangleright (b, s) \text{ und } a \sim b \Leftrightarrow (a, s) \approx (b, s).$$

- Für alle $a \in A^*$ und $s \in [\ell(a), u(a)]$ gilt

$$a \succ a_\emptyset \Leftrightarrow (a, s) \triangleright a_\emptyset, a \sim a_\emptyset \Leftrightarrow (a, s) \approx a_\emptyset \text{ und } a_\emptyset \succ a \Leftrightarrow a_\emptyset \triangleright (a, s).$$

Innerhalb einer Menge $(a, [\ell(a), u(a)])$ sind also alle Elemente äquivalent bezüglich \triangleright , dasselbe gilt für die Menge NZ . Es folgt ein Beispiel für die Einbettung:

$$\begin{array}{l} \succsim : \quad a \quad [\succsim, \sim] \quad b \quad [\succsim, \sim] \quad a_\emptyset \quad [\succsim, \sim] \quad c \\ \triangleright : \quad (a, [\ell(a), u(a)]) \quad [\triangleright, \approx] \quad (b, [\ell(a), u(a)]) \quad [\triangleright, \approx] \quad a_\emptyset \quad [\triangleright, \approx] \quad (c, [\ell(c), u(c)]) \quad \triangleright \quad NZ \end{array}$$

Man bemerke, dass wir hier eine Polynomialzeitreduktion von s-GASP auf GASP skizziert haben.¹⁵ Für die folgenden Beobachtungen nehmen wir jeweils an, dass (N, A, P, R) eine s-GASP-Instanz ist und (N, A, P') die daraus anhand der obigen Regeln erzeugte GASP-Instanz.

Eine individuell rationale Lösung in (N, A, P, R) ist eine in (N, A, P') und umgekehrt. Dasselbe gilt für Pareto-optimale Zuordnungen. Man beachte zu Pareto-optimalen Zuordnungen folgende Beobachtung: Angenommen, eine Zuordnung π ist in (N, A, P, R) nicht zulässig, dann gibt es einen Agenten i und eine Aktivität a sodass $(a, |\pi^a|) \in NZ$. Die Zuordnung π' mit $\pi'(j) = a_\emptyset$ für alle Agenten $j \in \pi^a$ und $\pi(j) = \pi'(j)$ für alle $j \notin \pi^a$ ist eine Pareto-Verbesserung gegenüber π . Eine Pareto-optimale Zuordnung in (N, A, P') ist also immer eine in (N, A, P, R) zulässige Lösung.

Das Konzept der Neidfreiheit zeigt bezüglich dieser Einbettung folgende paradoxe Eigenschaft: Eine nicht triviale Zuordnung π in (N, A, P') , bei der für alle $a \in A^*$ gilt, dass $(a, |\pi^a|) \in NZ$, ist neidfrei. In (N, A, P, R) ist π jedoch nicht zulässig.

Da in GASP jede stabile Zuordnung individuell rational sein muss, ist hier jede stabile Zuordnung π in (N, A, P') auch stabil (und insbesondere zulässig) in (N, A, P, R) . Umgekehrt jedoch kann es individuell stabile Zuordnungen π in (N, A, P, R) geben, die nicht individuell rational in (N, A, P') sind. Dies trifft für alle sechs Varianten von Stabilität in s-GASP und ihre Analoga in GASP zu.

Um diese Inkonsistenzen aufzulösen, schlage ich die Diskussion zweier Fragen vor.

1. Warum ist in s-GASP individuelle Rationalität keine Voraussetzung für Stabilität?
2. Ist die direkte Übertragung des „Core-Prinzips“ aus den Hedonic Games sinnvoll?

Zweitere Frage stellt sich auch im Zusammenhang mit der Beobachtung, dass in s-GASP aus core-stabil nicht individuell stabil folgt.




¹⁵Dies impliziert (sofern sich die entsprechenden Fragestellungen übertragen lassen), dass in GASP effizient lösbare Probleme auch in s-GASP effizient lösbar sind und umgekehrt in s-GASP als schwer identifizierte Probleme auch in GASP schwer sind.

A.4. Fall If It Lifts Your Teammate

A.4.1. Weitere Beispiele




Manipulation ohne Opfer (aber nicht strikt ohne Opfer)

Beispiel 15. In diesem Beispiel ist eine Manipulation ohne Opfer möglich (c für b), gekennzeichnet durch $*$, allerdings ist sie nicht strikt ohne Opfer. Abkürzungen: P Score, R Rang (Gesamtrangliste), PM und RM sind Score und Rang resultierend aus der Manipulation.

\mathcal{N}	Speed 	Bouldern 	Lead 		P	R	PM	RM
a	6	1	1	1	6	1	6	2
b	1	2	3	2	6	2	4	1
c	4	5	2	3	40	3	60	3
d	5	3	4	4	60	4	60	3
e	3	4	5	5	60	5	60	3
f	2	6	6	6	72	6	72	6

Identischer Score von drei oder mehr Athleten impliziert nicht das Condorcet-Paradoxon.

Beispiel 16. Drei Athleten können denselben Score haben, ohne dass das Condorcet-Paradoxon auftritt. Man beachte im folgenden Beispiel, dass $aT_{>}b$, $bT_{>}c$ und $aT_{>}c$ gilt.

\mathcal{N}	Speed 	Bouldern 	Lead 	Score	Rang
a	4	1	3	12	1
b	1	3	4	12	3
c	6	2	1	12	2
d, e, f	≥ 2	≥ 4	≥ 2	≥ 16	≥ 4

A.4.2. Immunität gegen Spoilermanipulation und Manipulation ohne Opfer impliziert nicht die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Die folgende Proposition geht auf eine Ausführung in der Publikation von Kruger und Schneckenburger [54] zurück.

Proposition 3. *Immunität gegen Spoilermanipulation und Manipulation ohne Opfer impliziert nicht die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.*

Beweis. Betrachten wir die Rankingfunktion, die immer nur genau zwei verschiedene Ränge (in der Gesamtrangliste) erzeugt. Nämlich Athlet a auf Rang 1 und alle anderen auf Rang 2 falls a in allen Disziplinen Erster wird, in allen anderen Fällen wird a Zweiter und die restlichen Athleten teilen sich den ersten Rang. Diese Rankingfunktion verletzt die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen, ist aber immun gegen Spoilermanipulation und Manipulation ohne Opfer. Man beachte hierzu, dass jeweils nur ein Athlet mit dem Gesamtrang 1 manipulieren kann, der hierdurch zwingend auf den zweiten Rang abrutscht. Dies ist somit keine Manipulation ohne Opfer und auch keine Spoilermanipulation, da der begünstigte Agent dann ja keinen besseren Rang als den ersten erhalten kann. \square

Die im Beweis von Proposition 3 beschriebene Rankingfunktion ist zwar nicht neutral, allerdings wird Neutralität weder in der Voraussetzungen von Theorem 1 (Kruger und Schneckenburger [54]) noch von Arrows Theorem (Arrow [5]) gefordert.

A.4.3. Überlegungen zur Komplexität von (Spoiler-)Manipulation

Betrachten wir die Komplexität für Manipulationen, speziell im Bezug auf Spoilermanipulation. Das Entscheidungsproblem CAN-SPOILER fragt für ein gegebenes Paar $(a, b) \in A \times A$ und ein Profil $P \in \mathcal{L}(A)^n$, ob a für b spoilern kann. CAN-SPOILER hängt polynomiell von der Anzahl der Athleten ab. Bei einer fixen Anzahl von Disziplinen n ist die Anzahl möglicher Manipulationen nach oben durch $2^{|NA|} = 2^n$ beschränkt. Weiter ist es für a stets leicht zu entscheiden, ob eine Manipulation (welcher Art auch immer) für b gegenüber einem fixen dritten Athleten c existiert.¹⁶ Dies wäre jedoch im

¹⁶Gegenüber c kann a genau in den Disziplinen i mit $a \succ_i b \succ_i c$ und $c \succ_i a \succ_i b$ produktiv für b gegen c manipulieren, nämlich jeweils durch „ $b \succ_i a$ “.

A. Appendix

Allgemeinen keine erfolgreiche Manipulation, da ja ein vierter Athlet d ebenfalls von der Manipulation profitieren könnte. Wir vermuten, dass dieses Problem NP-vollständig ist.

Für die Konstruktion eines Beweises wird folgende Beobachtung vermutlich ein relevanter Aspekt sein: Die Athleten profitieren unterschiedlich stark von ein und derselben Manipulation. Je weiter oben ein Athlet in der Disziplin gerankt ist, in der die Manipulation durchgeführt wird, desto stärker ist der relative Effekt der Manipulation für diesen Athleten (unter der Voraussetzung, dass sich überhaupt etwas für ihn ändert). Dies wird in der folgenden Tabelle A.4 verdeutlicht.

Tabelle A.4.: Relative Effekte einer Manipulation auf die Scores. (Eigene Darstellung)

	Ranking der manipulierten Disziplin	Effekt der Manipulation	Manipulierter Score im Verhältnis zum unverfälschten Score [%]
1:	a	–	100.0
2:	b	$[2 \mapsto 5]$	250.0
3:	c	$[3 \mapsto 2]$	$66.\bar{6}$
4:	d	$[4 \mapsto 3]$	75.0
5:	e	$[5 \mapsto 4]$	80.0
6:	f	–	100.0

B. Publikationen

B.1. The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation

The Atkinson Inequality Index in Multiagent Resource Allocation

Sebastian Schneckeburger
University of Tübingen
Germany
sebastian.schneckeburger
@uni-tuebingen.de

Britta Dorn
University of Tübingen
Germany
britta.dorn
@uni-tuebingen.de

Ulle Endriss
University of Amsterdam
The Netherlands
ulle.endriss@uva.nl

ABSTRACT

We analyse the problem of finding an allocation of resources in a multiagent system that is as fair as possible in terms of minimising inequality between the utility levels enjoyed by the individual agents. We use the well-known Atkinson index to measure inequality and we focus on the distributed approach to multiagent resource allocation, where new allocations emerge as the result of a sequence of local deals between groups of agents agreeing on an exchange of some of the items in their possession. Our results show that it is possible to design systems that provide theoretical guarantees for optimal outcomes that minimise inequality, but also that in practice there are significant computational hurdles to be overcome: finding an optimal allocation is computationally intractable—independently of the approach chosen—and large numbers of potentially highly complex deals may be required under the distributed approach. From a methodological point of view, while much work in multiagent resource allocation relies on combinatorial arguments, here we use insights from basic calculus.

Keywords

Multiagent Resource Allocation; Fair Division; Inequality Indices

1. INTRODUCTION

“What thoughtful rich people call the problem of poverty, thoughtful poor people call with equal justice a problem of riches.”

—Anthony B. Atkinson (1944 – 2017), *Inequality* [3]

Allocating resources to agents is one of the central tasks arising in most multiagent systems [9]. This is true not only for systems of economic agents who need to share the value they have generated together, but also for distributed systems of problem-solving agents who need to share the computational resources available to them. What makes a ‘good’ allocation heavily depends on the application at hand, but there is broad consensus in the multiagent systems research community that, rather than coming up with new *ad hoc* criteria for optimality for every new application, it is fruitful to base

the design of a multiagent system on well-understood formal criteria originally proposed in the literature on social choice theory and welfare economics [20].

For instance, if an *efficient* allocation is sought, both the notion of *utilitarian social welfare*, measuring quality in terms of the sum of the individual utilities, and the weaker notion of *Pareto optimality* have been found to be useful [26]. If *fairness* is a relevant design objective, there is a much wider range of concepts to choose from, several of which have been analysed in the literature on multiagent systems in some detail: e.g., *egalitarian social welfare*, measuring quality as utility of the worst-off agent, and its refinement the *leximin-ordering* [14, 6], *Nash social welfare*, measuring quality as the product of the individual utilities [24, 23], and the *absence of envy* [17, 10]. However, fairness criteria based on measuring inequality, which are widely used in the social sciences [16, 2, 27], to date have received almost no attention in the multiagent systems literature [19, 13].

To help close this gap, in this paper, we focus on one of the most important representatives of this family of criteria, the *Atkinson inequality index*, and analyse how to achieve allocations of resources that are optimal relative to this criterion. Our main contributions concern the challenge of ensuring convergence of an optimal allocation under the *distributed approach*, where the goal is to obtain a good allocation by means of a sequence of local exchanges of items between (typically small) groups of agents [25, 14, 12, 10]. In addition, we analyse the computational complexity of computing an optimal allocation that minimises inequality, which is relevant independently of the specific approach chosen for performing multiagent resource allocation. Our results show that, in principle, an appropriately designed system can be made to guarantee outcomes with minimal inequality amongst the agents, although in practice significant computational hurdles may have to be overcome. Specifically, we may require arbitrarily complex deals and we may require an exponential number of deals. From a methodological point of view, while much work in multiagent resource allocation relies on combinatorial arguments, here we specifically rely on insights from basic calculus.

The remainder of this paper is organised as follows. In Section 2 we introduce the model of multiagent resource allocation with indivisible goods we shall be working with and then recall the relevant definitions from the theory of inequality measurement. Section 3 contains a simple complexity result that clarifies the computational challenges involved in minimising inequality amongst agents in a multiagent resource allocation problem. Our main contributions

are presented in Section 4, where we set up a resource allocation framework that allows agents to compute an optimal allocation minimising inequality in a distributed manner, by means of implementing a number of local deals. Our technical results concern the guaranteed convergence to an optimal outcome as well as the aforementioned limitations of the framework. Section 5 concludes with a brief outlook on future directions of research in this domain.

2. PRELIMINARIES

In this section, we first introduce the basic setting of multi-agent resource allocation widely used in the literature [9, 5], where a number of indivisible goods need to be distributed amongst a number of agents who each have their own preferences over which bundles of goods to obtain. We then review the relevant definitions regarding inequality measurement from the literature on welfare economics [2, 27, 20], adapting them to the setting of indivisible goods [13].

2.1 Multiagent Resource Allocation

Let $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ be a finite set of *agents*, i.e., $n = |\mathcal{N}|$, and let \mathcal{G} be a finite set of *goods*, with $m = |\mathcal{G}|$. We refer to the elements of the power set $2^{\mathcal{G}}$ as *bundles*. An *allocation* is a function $A : \mathcal{N} \rightarrow 2^{\mathcal{G}}$, mapping agents to the bundles they obtain, with $A(i) \cap A(j) = \emptyset$ for any $i \neq j$.

Every agent $i \in \mathcal{N}$ is equipped with a *utility function* $u_i : 2^{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, mapping any bundle she might receive to the (nonnegative) utility she attaches to that bundle. We use $u_i(A)$ as a shorthand for $u_i(A(i))$, the utility enjoyed by agent i under allocation A . Every allocation A induces a *utility vector* $\mathbf{u}(A) = (u_1(A), \dots, u_n(A))$. The collection of all n utility functions is denoted by \mathcal{U} . A *scenario* is a triple $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$. A collection \mathcal{U} (and also the corresponding scenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$) is called *additive* if $u_i(B) = \sum_{x \in B} u_i(\{x\})$ for all agents $i \in \mathcal{N}$ and bundles $B \subseteq \mathcal{G}$.

The *utilitarian social welfare* of allocation A is defined as $sw_{util}(A) = \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)$, and the closely related *mean value* of A as $\mu(A) = \frac{1}{n} sw_{util}(A)$. They reflect the economic efficiency of A . The *Nash social welfare* $sw_{nash}(A) = \prod_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)$ of allocation A can be used to measure fairness.

2.2 Inequality Indices

One way of comparing allocations consists in considering the *inequality* induced by the corresponding utility vectors. This can be measured by a so-called *inequality index*, which is a function mapping allocations (or, equivalently, utility vectors) to the interval $[0, 1]$, where 0 stands for perfect equality (meaning that all agents receive the same utility, which must not be 0). High values close or equal to 1 stand for high inequality amongst the agents.

Famous examples of inequality indices are the *Gini index* [16], the *Robin Hood index* [18] (also called the *maximum relative mean deviation*), and the family of *Atkinson indices* [2].

Every Atkinson index relies on a notion of social welfare: For a given function sw mapping utility vectors to their social welfare and for a utility vector $\mathbf{u}(A)$ of an allocation A , first compute the so-called *equally distributed equivalent level of income* $\mu_{sw}(A)$, such that the vector $(\mu_{sw}(A), \dots, \mu_{sw}(A))$ has the same social welfare as $\mathbf{u}(A)$. The Atkinson index based on the function sw is then defined as $I_{sw}(A) := 1 - \frac{\mu_{sw}(A)}{\mu(A)}$ [2].

We will focus on the most important representative of this family, the Atkinson index based on the Nash social welfare:

$$I_{nash}(A) = 1 - \frac{\sqrt[n]{sw_{nash}(A)}}{\mu(A)} = 1 - \frac{\sqrt[n]{\prod_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)}}{\frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(A)},$$

with $I_{nash}(A) = 0$ if all individual utilities are 0.

While in the literature the term ‘Atkinson index’ is used both for the family and for this concrete one, here we only use it in this latter sense. From now on, we will use the notation \mathcal{I} instead of I_{nash} . It is easy to see that \mathcal{I} returns 0 if all the agents receive the same utility. Furthermore, we can show that it never returns 0 in any other case:

LEMMA 1. *If $\mathcal{I}(A) = 0$ for an allocation A , then all agents receive the same utility, i.e.,*

$$\mathcal{I}(A) = 0 \implies \forall i \in \mathcal{N} : u_i(A) = \mu(A).$$

PROOF. The assertion follows from the inequality for the arithmetic and the geometric mean, i.e.,

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$$

for any nonnegative real numbers x_1, \dots, x_n , with equality if and only if $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. A proof can be found in Cauchy’s *Analyse Algébrique* [8, pp. 457]. \square

We focus on the Atkinson index, because of its importance in the literature in the social sciences [2, 27, 1, 20]. While some other indices, notably the Gini index, are more widely used, the Atkinson index is often considered to be preferable on normative grounds, due to its principled formulation in terms of a notion of social welfare—in our case, Nash social welfare, which itself enjoys sound axiomatic foundations, going back all the way to the seminal work of Nash [21, 27, 20, 7]. Furthermore, the Atkinson index fulfils the common basic axioms for inequality indices which include the transfer principle, symmetry, and scale invariance [11, 2, 1]. The *transfer principle* states that transfers from an agent with a high utility to one with low utility shall not increase the inequality (if their order is maintained). An inequality index I is called *symmetric* if $I(\mathbf{u}(A)) = I(p_{\mathbf{u}(A)})$ holds for any permutation $p_{\mathbf{u}(A)}$ of a utility vector $\mathbf{u}(A)$ (meaning that the entries of $\mathbf{u}(A)$ are permuted). Finally, *scale invariance* means that multiplication of all utilities by a (positive) constant factor has no effect on the measured inequality.

3. COMPUTATIONAL COMPLEXITY

It is clearly desirable to find allocations that minimise the inequality amongst the agents. One might in particular ask whether, for a given scenario, there exists an allocation that is perfectly equal. In this section, we consider the computational complexity of this problem when inequality is measured in terms of the Atkinson index. The PERFECT INDEX OPTIMISATION problem is defined as follows:

PERFECT INDEX OPTIMISATION (PIO)

Instance: $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$

Question: \exists allocation $A : \mathcal{I}(A) = 0?$

Unfortunately, it turns out that this problem is NP-hard:

PROPOSITION 2. *The decision problem PIO is NP-hard, even for additive scenarios with just two agents.*

PROOF. First, note that, by Lemma 1, we have $\mathcal{I}(A) = 0$ if and only if the two agents enjoy the same level of utility. We use a reduction from the NP-hard PARTITION problem [15], which is defined as follows:

PARTITION	
Instance:	A finite set X , and a size $s(x) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ for each $x \in X$.
Question:	Is there a subset $X' \subseteq X$ such that $\sum_{x \in X'} s(x) = \sum_{x \in (X \setminus X')} s(x)$?

Given an instance $\langle X, \{s(x) \mid x \in X\} \rangle$ of the PARTITION problem, we construct an instance $\langle \{1, 2\}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ of PIO, where $\mathcal{G} = X$ and $u_1(B) = u_2(B) = \sum_{b \in B} s(b)$ for all $B \subseteq \mathcal{G} = X$. Then it is easily checked that $\langle X, \{s(x) \mid x \in X\} \rangle$ is a YES-instance if and only if $\langle \{1, 2\}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ is. \square

The PARTITION problem has previously been used to analyse the complexity of problems arising in multiagent resource allocation, such as the problem of finding an allocation that maximises egalitarian social welfare when utilities are additive [4, 22] and the problem of determining whether a given allocation permits an inequality reduction by means of a transfer between two agents with additive utilities [13]. We remark that NP-hardness for a less restricted scenario (unbounded number of agents, symmetric utilities) of PIO can also be shown by reduction from the EXACT COVER BY 3-SETS problem [15].

4. THE DISTRIBUTED APPROACH

As we have seen, the problem of deciding whether there exists an allocation with perfect equality is computationally intractable already for very restricted instances. Thus, computing such an allocation will be just as hard. Nevertheless, we are interested in minimising inequality amongst the agents. To this end, we will now explore adapting the so-called *distributed approach* formulated by Endriss et al. [14], relying on ideas originally introduced by Sandholm [25]. Under this approach, starting from some initial allocation, the agents can decide to arrange exchanges of some of the goods between some of them by means of so-called *deals*. The key idea is that the agents are supposed to only use local information: only some (preferably small number of) agents may be involved in a deal and they only have access to information on the goods they own and on the goods they exchange, not on the overall allocation. The goal is to devise a protocol for the agents to follow that, despite this limitation to local deals, permits them to negotiate an allocation with good global properties. This approach has been successfully applied to compute, in a distributed manner, allocations that are optimal in view of, amongst others, utilitarian social welfare [25], egalitarian social welfare [14], Nash social welfare [23], and envy-freeness [10].

After defining the notion of a deal formally (in Section 4.1), we will first prove that achieving convergence to an allocation with minimal inequality is impossible for deals that are *local* in the narrow sense in which this term has been defined in the literature before (see Section 4.2). However, we will then see that a very mild relaxation of this notion of locality is sufficient to obtain a convergence result (see

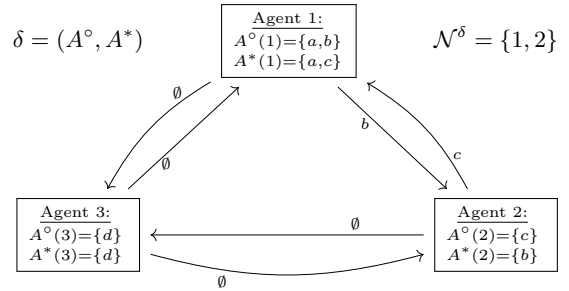


Figure 1: Scenario of Example 1 with a deal.

Section 4.3). This positive result is then tempered by two further results. First, we show that we must admit arbitrarily complex (yet semi-local) deals (see Section 4.4), and we must allow for the possibility of exponentially long sequences of deals before convergence is realised (see Section 4.5).

4.1 Deals and Sequences of Deals

A *deal* $\delta = (A, A')$ is a pair of two (distinct) allocations A and A' . The set of agents *involved* in the deal δ is denoted by \mathcal{N}^δ , i.e., $\mathcal{N}^\delta := \{i \in \mathcal{N} \mid A(i) \neq A'(i)\}$.

Example 1. Consider the set of goods $\mathcal{G} = \{a, b, c, d\}$, the set of agents $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, and the two allocations $A^\circ = (\{a, b\}, \{c\}, \{d\})$ and $A^* = (\{a, c\}, \{b\}, \{d\})$. The deal $\delta = (A^\circ, A^*)$ with involved agents $\mathcal{N}^\delta = \{1, 2\}$, in which agent 1 gives item b to agent 2 and receives item c in return, is visualised in Figure 1.

Note that a single deal may include any number of agents and goods (even if we think of a *typical* deal as involving just a few of each). We would like the agents to agree on a sequence of deals that—somehow—converges to an allocation that minimises inequality. Let us first exclude two approaches that are definitely not useful. First, we could give the agents complete freedom what deals to negotiate. This protocol cannot ensure convergence, as we cannot exclude the possibility of loops (e.g., they may indefinitely alternate between A° and A^* of Figure 1). Second, from any given allocation we could only permit a single deal, namely the deal that takes us straight to the optimal allocation. This also is not useful, as it would not leverage any of the potential power of the distributed approach and simply reduce it to a fully centralised optimisation problem.

4.2 No Convergence by Local Deals

We are looking for a criterion to select admissible deals such that (i) any sequence of admissible deals eventually leads to an optimal allocation and (ii) the agents involved in any given deal are able to determine locally whether that deal is admissible. But how should we define ‘locality’ in this context? Endriss et al. [14] call a criterion for determining the admissibility of a deal $\delta = (A, A')$ *local* if and only if the question of whether δ is local can be answered by looking only at the set $\{(i, u_i(A), u_i(A')) \mid i \in \mathcal{N}^\delta\}$. In other words, admissibility should only depend on the utility levels of the agents involved before and after the deal.

Unfortunately, it is impossible to define a deal selection criterion that is local in this sense and that could be used to guide our search for an optimal allocation by only ever admitting deals that reduce inequality:

PROPOSITION 3. *It is impossible to always decide whether a given deal $\delta = (A, A')$ would decrease inequality as defined by the Atkinson index by only inspecting the utility levels of the agents involved in δ in allocations A and A' .*

PROOF. We construct an example where a given deal would decrease inequality in one scenario but increase it in another, while the local information on the utility levels of the agents involved in that deal is the same in both scenarios. Consider the two scenarios $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_1 \rangle$ and $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_2 \rangle$, with $\mathcal{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ and $\mathcal{G} = \{a, b, c, d\}$. The additive collections of utility functions \mathcal{U}_1 and \mathcal{U}_2 are defined in terms of the values the agents assign to each of the items:

$$\left| \begin{array}{c|cccc} \mathcal{U}_1 & a & b & c & d \\ \hline \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{2} & 2 & 5 & 2 & 1 \\ \mathbf{3} & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c|cccc} \mathcal{U}_2 & a & b & c & d \\ \hline \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{2} & 2 & 5 & 2 & 1 \\ \mathbf{3} & 3 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right|$$

Now consider the deal $\delta = (A^\circ, A^*)$ between allocations $A^\circ = (\{a, b\}, \{c\}, \{d\})$ and $A^* = (\{a, c\}, \{b\}, \{d\})$, which is the same deal we had already considered in Figure 1. Let us compute the Atkinson index for each of the two allocations in each of the two scenarios:

	Scenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_1 \rangle$	Scenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U}_2 \rangle$
$\mathcal{I}(A^\circ)$	$1 - \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 2 \cdot 6}}{\frac{1}{3} \cdot (3+2+6)} \approx 0.099$	$1 - \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 2 \cdot 2}}{\frac{1}{3} \cdot (3+2+2)} \approx 0.019$
$\mathcal{I}(A^*)$	$1 - \frac{\sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 6}}{\frac{1}{3} \cdot (5+5+6)} \approx 0.004$	$1 - \frac{\sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 2}}{\frac{1}{3} \cdot (5+5+2)} \approx 0.079$

Thus, in the first scenario, δ decreases inequality, while in the second scenario, δ increases inequality. Nevertheless, the two agents involved in δ cannot distinguish between the two scenarios. Hence, there can be no local criterion for the admissibility of deals that would allow us to always select deals that decrease inequality. \square

For comparison, when optimality is defined in terms of utilitarian social welfare, egalitarian social welfare, or Nash social welfare, local criteria for selecting deals that ensure a social improvement do exist [14, 23]. When the goal is to compute an envy-free allocation, there exists no suitable local criterion, but this hurdle can be overcome by slightly relaxing the requirements [10]. We shall follow a similar route.

4.3 Convergence by Semi-Local Deals

Recall that the computation of the Atkinson index involves both the geometric mean and the arithmetic mean of the utilities of all agents. On the one hand, the local information on the utility levels of the involved agents is sufficient to determine both whether (i) the geometric mean increases or decreases, and whether (ii) the arithmetic mean increases or decreases.¹ On the other hand, the underlying reason for the impossibility stated in Proposition 3 is that, nevertheless, this local information is not sufficient to determine which of these two effects is stronger, and thus whether inequality will increase or decrease.

We now define a *semi-local* criterion for the admissibility of deals that relaxes the constraints on the information available a little and thereby allows us to overcome this problem.

¹This is precisely the reason why it is possible to design local criteria for agents wishing to compute allocations with maximal Nash and utilitarian social welfare, respectively.

The central idea is to allow the agents to also access $\mu(A)$, the (arithmetic) mean of the utilities of *all* agents (not just the involved agents) before the deal. Given $\mu(A)$ and the usual local information, we can compute $\mu(A')$ for another allocation A' reached by the deal $\delta = (A, A')$ as follows:

$$\mu(A') = \mu(A) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i \in \mathcal{N}^\delta} (u_i(A') - u_i(A))$$

We still do not have full access to the geometric mean of all utilities, but only to the extent to which it changes during the deal. As will become clear shortly, this is not a problem.

Let us call a deal $\delta = (A, A')$ an *Atkinson deal* if and only if it satisfies the following condition:

$$\frac{\sqrt[n]{\prod_{i \in \mathcal{N}^\delta} u_i(A)}}{\mu(A)} > \frac{\sqrt[n]{\prod_{i \in \mathcal{N}^\delta} u_i(A')}}{\mu(A) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i \in \mathcal{N}^\delta} (u_i(A') - u_i(A))}$$

Observe that we can determine whether a given deal is an Atkinson deal using semi-local information only: we require the utility levels in A and A' for the involved agents as well as the mean value of the entire society in A . The good news is that this is sufficient to allow us to compute an optimal allocation in a distributed manner:

THEOREM 4. *For every scenario and initial allocation, every sequence of Atkinson deals will eventually result in an allocation that minimises inequality, as defined by the Atkinson index.*

PROOF. First, observe that a deal decreases inequality if and only if it is an Atkinson deal (this is immediate from the definitions of Atkinson index and Atkinson deals).

As there are only a finite number of allocations, any sequence without cycles has to terminate eventually. As every deal in the sequence strictly decreases inequality, there cannot be any cycles, which proves termination. Finally, it is impossible for the terminal allocation A to not have minimal inequality, as then there would have to exist another allocation A' with lower inequality, which would make the deal $\delta = (A, A')$ an Atkinson deal, i.e., A could not have been terminal in the first place. \square

Similar convergence results have been proved for a number of other criteria for social optimality [25, 14, 23, 10]. In some cases, notably for utilitarian social welfare and envy-freeness [25, 10], the admissibility criterion for deals has an attractive interpretation as a *rationality criterion* for *selfish agents*. For example, in the case of utilitarian social welfare, we obtain convergence by means of deals for which myopic agents with quasi-linear utilities can negotiate prices that benefit all agents involved in the deal. In other cases, notably for egalitarian social welfare and Nash social welfare [14, 23], just as for our result here, convergence theorems should be interpreted as showing that *cooperative agents* can collectively compute an optimal outcome without requiring global coordination to guide their search. Specifically, Theorem 4 shows that agents can freely contract deals with their neighbours, safe in the knowledge that every single deal will improve the global situation and no deal will cut them off from a route to an optimal allocation.

4.4 Necessity of Complex Deals

Theorem 4 shows that we will always reach an allocation with minimal inequality, provided we keep on contracting new Atkinson deals as long as any such deals exist. But our result does not say anything about how complex these deals are. Ideally, we would prefer deals that involve the exchange of only a small number of goods between a small number of agents. So we may ask whether a given deal, particularly a deal of high structural complexity, might ever become *necessary* for reaching an allocation with minimal inequality. Unfortunately, this is indeed the case:

THEOREM 5. *For every deal δ , there exist utility functions and a starting allocation, such that δ is necessary for reaching an allocation that minimises inequality, as defined by the Atkinson index, by means of Atkinson deals only.*

Theorem 5 is bad news since it shows that, if we want to reach an optimal allocation by using Atkinson deals, it might be unavoidable to use very complex deals—even involving all agents and all items. The proof is omitted for lack of space. It makes use of Lemma 7 below which covers the special case where δ is not *independently decomposable* (to be defined shortly). For the remaining cases, it uses the fact that any other deal can be decomposed into a sequence of deals each of which is not independently decomposable.

In this context, a deal $\delta = (A, A'')$ is called *independently decomposable* if it concerns two separate sets of transactions between two disjoint sets of agents, i.e., if there exists a third allocation A' such that, for the deals $\delta_1 = (A, A')$ and $\delta_2 = (A', A'')$, it is the case that $\mathcal{N}^{\delta_1} \cap \mathcal{N}^{\delta_2} = \emptyset$ [14].

To prove necessity of all independently decomposable deals, we require the following technical lemma.

LEMMA 6. *For every $n \in \mathbb{N}_{>1}$, the function*

$$T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto 1 - \frac{\sqrt[n]{1-x}}{1 - \frac{x}{n}}$$

is strictly monotonically increasing and thus bijective.

PROOF. T is well-defined and differentiable. Furthermore $T(0) = 0$, $T(1) = 1$, and $\frac{d}{dx}T(x) = \frac{(n-1)x(1-x)^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}}{(n-x)^2} > 0$ holds for all $x \in]0, 1[$, which implies the claim. \square

We can now show that every deal that is not independently decomposable is necessary in the above sense:

LEMMA 7. *For every deal $\delta = (A, A')$ that is not independently decomposable, there exist utility functions $(u_i)_{i \in \mathcal{N}}$ and a starting allocation, such that δ is necessary for reaching an allocation that minimises inequality, as defined by the Atkinson index, by means of Atkinson deals only.*

PROOF. For the given deal $\delta = (A, A')$, we construct a utility function for every agent. As A and A' are different, there is at least one agent j with $A(j) \neq A'(j)$. We fix this j and let $0 < x < 1$. We now define the utility functions for any given bundle $B \in 2^{\mathcal{G}}$ as

$$u_i(B) = \begin{cases} 1 & \text{if } A'(i) = B, \\ 1 & \text{if } (i \neq j) \text{ and } A(i) = B, \\ 1-x & \text{if } (i = j) \text{ and } A(i) = B, \\ \frac{1}{i+1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is now easy to see that $\mathcal{I}(A') = 0$ and

$$\mathcal{I}(A) = 1 - \frac{\sqrt[n]{1-x}}{1 - \frac{x}{n}}.$$

Next, we show that for any different allocation A^* we have $\mathcal{I}(A^*) > 0$. As the deal δ is not independently decomposable, there is at least one pair of agents k, ℓ with $u_k(A^*) \neq u_\ell(A^*)$: otherwise, we would have $u_i(A^*) = 1$ for all $i \in \mathcal{N}$, meaning that A^* agrees with either A or A' for every agent, i.e., δ would be independently decomposable into the deals (A, A^*) and (A^*, A') , contradicting our assumptions. Thus, by Lemma 1, we must have that $\mathcal{I}(A^*) > 0$. As there are only finitely many possible allocations, we get

$$\min_{A^* \neq A, A'} \mathcal{I}(A^*) > 0.$$

We now choose some ε with $0 < \varepsilon < \min_{A^* \neq A, A'} \mathcal{I}(A^*)$ and then set x such that $\mathcal{I}(A) = \varepsilon$, which is possible due to Lemma 6. Hence, we have $0 = \mathcal{I}(A') < \mathcal{I}(A) < \mathcal{I}(A^*)$. Thus, in this scenario, from allocation A , $\delta = (A, A')$ is the only deal reducing \mathcal{I} , and thus the only Atkinson deal. \square

Our construction used in the proof of Lemma 7 is similar to the construction used to derive necessity results for utilitarian and egalitarian social welfare [14] as well as Nash social welfare [23]. In those other settings, not only are all non-independently decomposable deals necessary, but these are the *only* such deals. So Theorem 5 is a bad surprise, as in the present setting the situation is worse and even deals that *are* independently decomposable are necessary. The following example also illustrates this fact:

Example 2. Consider the (additive) scenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$, with $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ and $\mathcal{G} = \{a, b, c, d\}$. The collection \mathcal{U} of additive utility functions is defined in terms of the values the agents assign to each of the items:

\mathcal{U}	a	b	c	d
1 :	4	10	4	4
2 :	10	3	3	3
3 :	2	2	2	10
4 :	1	1	10	1

Now consider the deal $\delta = (A, A')$ between allocations $A = (\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\})$ and $A' = (\{b\}, \{a\}, \{d\}, \{c\})$. This deal is decomposable; there are two possible decomposition sequences, (A, A^{i1}, A') and (A, A^{i2}, A') with $A^{i1} = (\{a\}, \{b\}, \{d\}, \{c\})$ and $A^{i2} = (\{b\}, \{a\}, \{c\}, \{d\})$.

As \mathcal{U} is additive, only allocations which assign exactly one item to each agent are not completely unfair. So there are only $4!$ allocations with inequality not equal to 1, but from these, only A^{i1} , A^{i2} , and A' have a different inequality from A . The values of \mathcal{I} for these four allocations are as follows:

$$\mathcal{I}(A) : = 1 - \frac{\sqrt[4]{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{1}{4} \cdot (4+3+2+1)} \approx 0.115$$

$$\mathcal{I}(A^{i1}) = 1 - \frac{\sqrt[4]{10 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{1}{4} \cdot (10+10+2+1)} \approx 0.346$$

$$\mathcal{I}(A^{i2}) = 1 - \frac{\sqrt[4]{4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10}}{\frac{1}{4} \cdot (4+3+10+10)} \approx 0.128$$

$$\mathcal{I}(A') = 1 - \frac{\sqrt[4]{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}}{\frac{1}{4} \cdot (10+10+10+10)} = 0$$

So in this example, given the allocation A , the (independently decomposable) deal $\delta = (A, A')$ is necessary.

Finally, we are able to show that deals involving all agents and all goods can become necessary even for *additive* scenarios—at least when the number of goods equals or exceeds the number of agents. Again, we omit all details for lack of space.

4.5 Path Length to Convergence

In this section, we are interested in the number of deals needed to reach an optimal allocation. It is clear that, given a starting allocation A , it is always possible to reach an optimal allocation A_{opt} with at most one Atkinson deal: just use the deal as $\delta = (A, A_{\text{opt}})$ —unless A already is optimal and no deal is needed. It thus is more interesting to ask how long a sequence of Atkinson deals from an initial to an optimal allocation can be in the worst case. It is easy to establish an upper bound: First, observe that there are n^m possible allocations (recall that $n = |\mathcal{N}|$ and $m = |\mathcal{G}|$). Second, observe that, since every Atkinson deal strictly reduces inequality, we cannot visit any allocation twice. Hence, there can be at most $n^m - 1$ deals in total. We will show that there are scenarios for which this theoretical maximum can in fact be reached. To do so, we will construct a scenario where no two allocations produce the same inequality. We start showing this for the case of two agents in Lemma 8, before we proceed to the general case of this assertion in Lemma 11.

LEMMA 8. *For two agents and m goods, $m \in \mathbb{N}$, it is possible to define utility functions such that any two distinct allocations have a different value of \mathcal{I} .*

PROOF. The proof of this lemma is inspired by the proof of Lemma 1 in the work of Ramezani and Endriss [23] for the Nash social welfare. We assign to agents 1 and 2 the prime numbers 2 and 3, respectively. Now suppose each agent has an ordering on all possible 2^m bundles, and $u_1(B) = 2^j$ if B is the j^{th} bundle in the first agent's ordering. Analogously, let $u_2(C) = 3^j$ if C is the j^{th} bundle in the second agent's ordering. In an allocation A , agent i receives the $(j_A^i)^{\text{th}}$ bundle in his ordering. It is easy to see that any two allocations A and A' have different Nash social welfare, since

$$sw_{\text{nash}}(A) = 2^{j_A^1} \cdot 3^{j_A^2} = 2^{j_{A'}^1} \cdot 3^{j_{A'}^2} = sw_{\text{nash}}(A')$$

would imply directly $j_A^1 = j_{A'}^1$ and $j_A^2 = j_{A'}^2$ due to the unique prime factorisation of every integer.

Now we will show that also $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(A')$ implies $A = A'$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(A') \\ \implies & 1 - \frac{\sqrt{sw_{\text{nash}}(A)}}{\mu(A)} = 1 - \frac{\sqrt{sw_{\text{nash}}(A')}}{\mu(A')} \\ \implies & \frac{\sqrt{2^{j_A^1} \cdot 3^{j_A^2}}}{\frac{1}{2} \cdot (2^{j_A^1} + 3^{j_A^2})} = \frac{\sqrt{2^{j_{A'}^1} \cdot 3^{j_{A'}^2}}}{\frac{1}{2} \cdot (2^{j_{A'}^1} + 3^{j_{A'}^2})} \\ \implies & 2^{j_A^1} \cdot 3^{j_A^2} \cdot (2^{j_{A'}^1} + 3^{j_{A'}^2})^2 = 2^{j_{A'}^1} \cdot 3^{j_{A'}^2} \cdot (2^{j_A^1} + 3^{j_A^2})^2. \end{aligned}$$

As $(2^j + 3^{j'}) \equiv 0 \pmod{2}$ can never hold for any $(j, j') \in \{1, \dots, 2^m\}^2$ and also $(2^j + 3^{j'}) \equiv 0 \pmod{3}$ can never hold for any $(j, j') \in \{1, \dots, 2^m\}^2$, the unique prime factorisation of each side of the last equation leads again directly to $j_A^1 = j_{A'}^1$ and $j_A^2 = j_{A'}^2$ which implies $A = A'$. \square

We will require the following technical lemma:

LEMMA 9. *Let $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ and $j_1, j_2, k_1, k_2 > 0$. Then*

$$1 - \frac{\sqrt[n]{2^{j_1} \cdot 3^{k_1}}}{\frac{1}{n}(2^{j_1} + 3^{k_1})} = 1 - \frac{\sqrt[n]{2^{j_2} \cdot 3^{k_2}}}{\frac{1}{n}(2^{j_2} + 3^{k_2})}$$

holds iff $j_1 = j_2$ and $k_1 = k_2$.

PROOF. This lemma can be proved by proceeding analogously to the reasoning in the proof of Lemma 8. \square

The proof of Lemma 8 cannot easily be generalised for more than 2 agents, as the argumentation with the modulo calculation does not hold any longer: $(2^i + 3^j + 5^k) \pmod{5}$ can be equal to 0 for $i = j = k$, e.g., $(2^1 + 3^1 + 5^1) \pmod{5} = 0$. Nevertheless, the closely related Lemma 9 will help us to prove the generalised statement for any number of agents. But first, we prove one further technical lemma:

LEMMA 10. *Real functions $g_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ given by*

$$g_{a,b}(x) = \frac{a \cdot x}{(b+x)^k}$$

for $a, b > 0$ and $k \in \mathbb{N}$ can be interpolated exactly by using just two points $(x_1, c_1), (x_2, c_2)$ of the graph of the function if we restrict the function to values $x \gg b/k$.

PROOF. Given the two equations $\frac{a \cdot x_1}{(b+x_1)^k} = c_1$ and $\frac{a \cdot x_2}{(b+x_2)^k} = c_2$, eliminating a leads to $\frac{c_1 x_2}{c_2 x_1} = \left(\frac{b+x_2}{b+x_1}\right)^k$. This equation can be solved via

$$\underbrace{\sqrt[k]{\frac{c_1 x_2}{c_2 x_1}}}_{\tau} = \frac{b+x_2}{b+x_1} \implies \frac{\tau x_2 - x_1}{1-\tau} = b,$$

so the interpolation is unique (meaning the equation has a unique solution (a, b)). \square

This means that, if two functions of the above type agree on their values for two (large enough) values of x , then they already have to be identical. We will need this property for constructing utility functions that imply different values of \mathcal{I} for each possible allocation in the corresponding scenario.

LEMMA 11. *For any natural numbers n and m , there exists a scenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ with $|\mathcal{N}| = n$ and $|\mathcal{G}| = m$ such that any two distinct allocations differ in inequality, as defined by the Atkinson index.*

PROOF. We consider the scenario $\langle \mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ and construct utility functions that fulfil the claim. As the elements of \mathcal{U} are the functions $u_i: 2^{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, it is possible to store all the information of \mathcal{U} in the $n \times 2^m$ matrix $P = (p_{i,j})_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, 2^m}$ with $p_{i,j} = u_i(B_j)$. Herby we suppose some arbitrary, but given ordering (B_1, \dots, B_{2^m}) of the elements of $2^{\mathcal{G}}$. For given $n, m \in \mathbb{N}$, we fill this matrix recursively to obtain the desired result. We start the recursion with the first two rows and the following entries:

$$P = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^2 & \dots & 2^{2^m} \\ 3^1 & 3^2 & \dots & 3^{2^m} \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

The symbol $*$ means that we have not yet fixed a value for the corresponding entry. We notice an interesting property

of this collection of 2^{m+1} real numbers. Let $p = (p(1), p(2))$ and $q = (q(1), q(2))$ be elements of

$$\{2^1, 2^2, \dots, 2^{2^m}\} \times \{3^1, 3^2, \dots, 3^{2^m}\}.$$

Then, with the shorthand notation $\prod_p = \prod_{i=1}^2 p(i)$ and $\sum_p = \sum_{i=1}^2 p(i)$, we see that

$$1 - \frac{\sqrt[2]{\prod_p}}{\frac{1}{2}\sum_p} = 1 - \frac{\sqrt[2]{\prod_q}}{\frac{1}{2}\sum_q}$$

implies, by Lemma 9, that $p = q$. (This means, sloppily speaking, that similarly as in Lemma 8, if utilities are given by the already existing entries of P , any two different ‘allocations’ exhibit a different level of inequality—they only have the same level if they are the same. At this stage, we cannot speak of real allocations and \mathcal{I} yet, since we are only considering the utilities of bundles for a subset consisting of two agents. We therefore also cannot compute \mathcal{I} , but a similar value by taking into account only those agents that are already involved. We make this more formal below.)

We generalise this property to bigger collections of entries of the matrix P . Let $1 \leq \ell \leq n$ and $1 \leq k \leq 2^m$. Suppose we have already fixed values for the entries of the first $\ell - 1$ rows and for the first $k - 1$ entries of the ℓ th row. For every $1 \leq i \leq \ell - 1$, we define

$$P_i := \{p_{i,j} : 1 \leq j \leq 2^m\} \subset \mathbb{R}$$

as the set of entries in the i th row of P , corresponding to the utilities that agent i assigns to the possible bundles, and the Cartesian product $P^{(\ell-1)} := P_1 \times \dots \times P_{\ell-1}$. For the elements $p = (p(1), p(2), \dots, p(\ell-1))$ of $P^{(\ell-1)}$ (consisting of one entry from each of the already filled rows of P), we use the shorthand notation $\prod_p = \prod_{i=1}^{\ell-1} p(i)$ and $\sum_p = \sum_{i=1}^{\ell-1} p(i)$.

We call a collection of the first $((\ell-1) \cdot 2^m + k - 1)$ entries from P *feasible*, if—sloppily speaking—for every choice of one entry from each already filled row, i.e., for each set of utilities for the possible bundles, any two ‘allocations’ would exhibit a different value of inequality (again, we cannot really speak of \mathcal{I} yet, as we only consider a *partial* allocation as long as the matrix is not entirely filled, but this helps for the intuition). More formally, this means in the case of $k = 1$ (when the first entry of each row is computed) that

$$1 - \frac{\sqrt[\ell-1]{\prod_p}}{\frac{1}{\ell-1}(\sum_p)} = 1 - \frac{\sqrt[\ell-1]{\prod_q}}{\frac{1}{\ell-1}(\sum_q)}$$

implies $p = q$ and $i = j$ for any $p, q \in P^{(\ell-1)}$ and $1 \leq i, j \leq 2^m$. If $k \geq 2$, we call the collection of the $(\ell-1) \cdot 2^m + k - 1$ already fixed entries of P *feasible* if

$$1 - \frac{\sqrt[\ell]{\prod_p \cdot p_{\ell,i}}}{\frac{1}{\ell}(\sum_p + p_{\ell,i})} = 1 - \frac{\sqrt[\ell]{\prod_q \cdot p_{\ell,j}}}{\frac{1}{\ell}(\sum_q + p_{\ell,j})}$$

implies $p = q$ and $i = j$ for any $p, q \in P^{(\ell-1)}$ and $1 \leq i, j < k$.

The recursion step now is to fix the value for $p_{\ell,k}$ such that the new collection of the $(\ell-1) \cdot 2^m + k - 1 + 1$ then fixed entries of P is also feasible. Table 1 illustrates the situation of the recursion step. The entry to be fixed is marked by an \mathbf{x} . As we have seen in the remark after Lemma 9, just taking powers of primes is not helpful. We therefore define real functions that feature the property used in Lemma 10.

Table 1: The partially filled matrix P in the recursion step in the proof of Lemma 11.

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & p_{1,2^m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{\ell-1,1} & \dots & p_{\ell-1,k-1} & p_{\ell-1,k} & p_{\ell-1,k+1} & \dots & p_{\ell-1,2^m} \\ p_{\ell,1} & \dots & p_{\ell,k-1} & \mathbf{x} & * & \dots & * \\ * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

We will start with the recursion step for $k = 1$. We now have to fix the value for $p_{\ell,1}$. We define the family of functions $(f_p)_{p \in P^{(\ell-1)}}$ with

$$f_p : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto 1 - \frac{\sqrt[\ell]{\prod_p \cdot x}}{\frac{1}{\ell}(\sum_p + x)}.$$

Any pair of distinct functions of this family cannot intersect more than once if we restrict them to a suitable interval of the form $[\pi_1, \infty[$ for some $\pi_1 \in \mathbb{R}$ (which will be determined later on). To see this, we observe the connection to Lemma 10. The equation

$$1 - \frac{\sqrt[\ell]{\prod_p \cdot x_1}}{\frac{1}{\ell}(\sum_p + x_1)} = 1 - \frac{\sqrt[\ell]{\prod_p \cdot x_2}}{\frac{1}{\ell}(\sum_p + x_2)}$$

is equivalent to

$$\frac{\prod_p \cdot x_1}{(\sum_p + x_1)^\ell} = \frac{\prod_p \cdot x_2}{(\sum_p + x_2)^\ell}.$$

Let $p, q \in P^{(\ell-1)}$ be given. If x_1 and x_2 are large enough (for example $0 < \sum_p/\ell, \sum_q/\ell \ll x_1 < x_2$), then $f_p(x_1) = f_q(x_1)$ and $f_p(x_2) = f_q(x_2)$ imply $p = q$. This is true due to Lemma 10.

Let $\pi_1 = \max_{p \in P^{(\ell-1)}} \sum_p/\ell$. Then if we restrict the family $(f_p)_{p \in P^{(\ell-1)}}$ to values greater than π_1 , any pair of those functions can intersect not more than once by the above analysis. Let π_2 be the largest x -value such that two of these functions intersect. If we choose for $p_{\ell,1}$ a value greater than π_2 , we obtain that

$$1 - \frac{\sqrt[\ell]{\prod_p \cdot p_{\ell,1}}}{\frac{1}{\ell}(\sum_p + p_{\ell,1})} = 1 - \frac{\sqrt[\ell]{\prod_q \cdot p_{\ell,1}}}{\frac{1}{\ell}(\sum_q + p_{\ell,1})}$$

implies $p = q$ for any $p, q \in P^{(\ell-1)}$.

The recursion step for $k > 1$ is almost the same. We basically just have to replace $p_{\ell,1}$ by $p_{\ell,k}$. Furthermore, we have to choose for $p_{\ell,k}$ a value not only greater than the corresponding π_2 , but also greater than some other lower bound implicitly given by the set $Z = \left\{ 1 - \frac{\sqrt[\ell]{\prod_q \cdot p_{\ell,i}}}{\frac{1}{\ell}(\sum_q + p_{\ell,i})} \right\}_{q \in P^{(\ell-1)}, 1 \leq i < k}$. As $\max Z < 1$, choosing x large enough will result in $1 > f_p(x) > z$ for all $p \in P^{(\ell-1)}$ and $z \in Z$. This can be done since (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_p(x) = 1$, and (ii) $f_p(0) = 1$ if and only if $x = 0$ hold for all $f_p \in (f_p)_{p \in P^{(\ell-1)}}$. So, choosing x large enough to obtain $1 > f_p(x) > z$ for all $p \in P^{(\ell-1)}$ and $z \in Z$ is possible.

We also refer to Figure 2 for an intuition: All functions f_p have the shape of the function shown in the plot. In particular, all functions of this type are differentiable with

$$\frac{d}{dx} f_p(x) = -\sqrt[\ell]{\prod_p} \cdot \left(\frac{\sqrt[\ell]{x}}{\ell} \left(\frac{\sum_p + x}{\ell \cdot x} - 1 \right) \right),$$

so the sign of $\frac{d}{dx} f_p(x)$ is determined by the term $\left(\frac{\sum_p + x}{(\ell+1)x} - 1 \right)$. It is easy to check that

$$\frac{d}{dx} f_p(x) \begin{cases} < 0 & \text{if } x \in]0, \sum_p / \ell[, \\ = 0 & \text{if } x = \sum_p / \ell \text{ and} \\ > 0 & \text{if } x \in]\sum_p / \ell, \infty[. \end{cases}$$

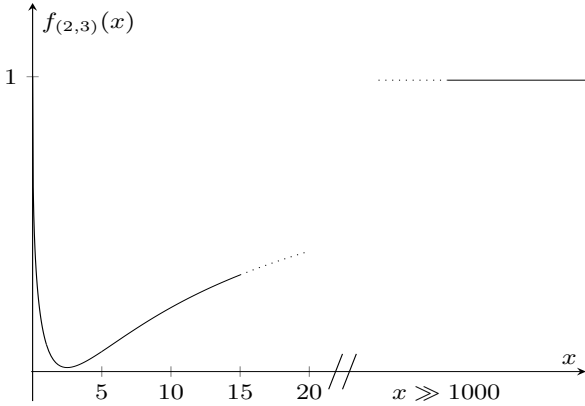


Figure 2: A sketch of the function $f_p \in (f_p)_{p \in P^{(\ell-1)}}$ with $\ell = 3$ and $p = (2, 3)$. All functions used in the proof of Lemma 11 have a similar shape, in particular we use that $\lim_{x \rightarrow \infty} f_p(x) = 1$ for all f_p .

Now let us check $P = (p_{i,j})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,2^m}$. By construction, the function $\mathcal{F}: P^{(n)} \rightarrow [0, 1], p \mapsto 1 - \frac{\sqrt[\ell]{\prod_p}}{\frac{1}{n}(\sum_p)}$ is injective. We define $\mathcal{U}_{\mathcal{N}, \mathcal{G}} := \{\mathbf{u}(A) : A \text{ is an allocation in } (\mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{U})\}$. Then $\mathcal{U}_{\mathcal{N}, \mathcal{G}} \subseteq P^{(n)}$ and $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_{\mathcal{N}, \mathcal{G}}} = \mathcal{I}|_{\mathcal{U}_{\mathcal{N}, \mathcal{G}}}$, completing the proof. \square

The uniqueness property just established now is key to proving the result announced earlier (recall once more that n is the number of agents and m is the number of goods):

THEOREM 12. *A sequence of Atkinson deals leading to an allocation that minimises inequality, as defined by the Atkinson index, can consist of up to $n^m - 1$ deals, but not more.*

PROOF. There are n^m possible allocations (each of the m items may be given to any of the n agents). By Lemma 11, there exist scenarios for which each of these allocations has a unique value of \mathcal{I} . Then, by ordering all allocations in descending order by their value of \mathcal{I} and by defining the corresponding deals between these allocations, we obtain a sequence of $n^m - 1$ deals. Each of these deals decreases inequality and therefore is an Atkinson deal. The argument for why there can never be more than $n^m - 1$ Atkinson deals in a row has been given at the beginning of Section 4.5. \square

5. CONCLUSION

We have shown that the Atkinson index, one of the most important social fairness criteria in the literature, can be

optimised in a distributed manner (Theorem 4) and thus is suitable for implementation as an objective in a multiagent system. We have been able to do so despite two inherent difficulties: the fact that the problem of finding an optimal allocation (with perfect equality) is NP-hard (Proposition 2), and the fact that the essence of what it means to reduce inequality cannot be captured locally (Proposition 3). While most other social criteria studied in the context of multiagent resource allocation also require us to solve computationally intractable optimisation problems [9], the only other such criterion that also shares the second difficulty and that nevertheless has been analysed successfully using the distributed approach is envy-freeness [10].

While Theorem 4 is encouraging, our additional results show that implementing this solution still comes with significant practical challenges. First, agents must be able to agree on arbitrarily complex exchanges of resources, without any limits on either the number of agents or the number of resources involved (Theorem 5). Second, the number of exchanges implemented before an optimal allocation is reached can get very high and in the most extreme case we might end up visiting every logically possible allocation along the way (Theorem 12). For these negative results in particular, we have made use of analytical techniques from the basic calculus toolbox, which is unusual in the field of multiagent resource allocation and which we hope might be useful to others working on related problems.

We also hope that our work will inspire other researchers in multiagent systems, first, to use the formal notion of social inequality in the design of practical multiagent systems and, second, to further advance our state of knowledge regarding the algorithmic challenge of minimising inequality in a multiagent system. Both aspects are currently underrepresented in multiagent systems research (the very few exceptions include the works of Lesca and Perny [19] and Endriss [13]), even though inequality indices are widely studied and used in practice across much of the social sciences.

Our work also suggests a number of very concrete avenues for future research. First, is a similar analysis possible for other inequality indices? For the Gini index [16], we conjecture that it would be difficult to achieve optimisation in a distributed manner without making major concessions regarding the definition of the ‘locality’ of a deal. For the Theil index [28], another popular inequality index, our own preliminary results show that distributed optimisation likely will be possible, but in a less elegant manner than for the Atkinson index. Second, how obstructive are our negative results in practice? To address this question, we might generate a scenario (using synthetic preferences or preferences extracted from a real-world problem) and simulate what happens when agents randomly choose between one of the Atkinson deals currently available to them (possibly giving more weight to structurally simpler deals). One could investigate how often such a system gets stuck in a state where all available deals exceed some given structural complexity threshold (to assess the practical relevance of Theorem 5). One could also count the average number of deals contracted in such a system (to assess the practical relevance of Theorem 12).

6. ACKNOWLEDGMENTS

We thank our anonymous reviewers for their careful reading and valuable feedback. This work was partly supported by COST Action IC1205 on Computational Social Choice.

REFERENCES

- [1] P. D. Allison. Measures of inequality. *American Sociological Review*, 43(6):865–880, 1978.
- [2] A. B. Atkinson. On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory*, 2:244–263, 1970.
- [3] A. B. Atkinson. *Inequality*. Harvard University Press, 2015.
- [4] S. Bouveret. *Allocation et Partage Equitables de Ressources Indivisibles: Modélisation, Complexité et Algorithmique*. PhD thesis, ISAE Toulouse, 2007.
- [5] S. Bouveret, Y. Chevaleyre, and N. Maudet. Fair allocation of indivisible goods. In F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang, and A. D. Procaccia, editors, *Handbook of Computational Social Choice*, chapter 12. Cambridge University Press, 2016.
- [6] S. Bouveret and M. Lemaître. Computing leximin-optimal solutions in constraint networks. *Artificial Intelligence*, 173(2):343–364, 2009.
- [7] I. Caragiannis, D. Kurokawa, H. Moulin, A. D. Procaccia, N. Shah, and J. Wang. The unreasonable fairness of maximum nash welfare. In *Proceedings of the 17th ACM Conference on Economics and Computation (EC-2016)*, pages 305–322. ACM, 2016.
- [8] A.-L. Cauchy. Cours d’analyse. *OEuvres Complètes*, Bd, 3, 1821.
- [9] Y. Chevaleyre, P. E. Dunne, U. Endriss, J. Lang, M. Lemaître, N. Maudet, J. Padget, S. Phelps, J. A. Rodríguez-Aguilar, and P. Sousa. Issues in multiagent resource allocation. *Informatica*, 30:3–31, 2006.
- [10] Y. Chevaleyre, U. Endriss, and N. Maudet. Distributed fair allocation of indivisible goods. *Artificial Intelligence*, 242:1–22, 2017.
- [11] H. Dalton. The measurement of the inequality of incomes. *The Economic Journal*, 30(119):348–361, 1920.
- [12] P. E. Dunne, M. Wooldridge, and M. Laurence. The complexity of contract negotiation. *Artificial Intelligence*, 164(1–2):23–46, 2005.
- [13] U. Endriss. Reduction of economic inequality in combinatorial domains. In *Proceedings of the 12th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS-2013)*, pages 175–182. IFAAMAS, 2013.
- [14] U. Endriss, N. Maudet, F. Sadri, and F. Toni. Negotiating socially optimal allocations of resources. *Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)*, 25:315–348, 2006.
- [15] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, New York, 1979.
- [16] C. Gini. *Variabilità e Mutabilità*. C. Cuppini, Bologna, 1912.
- [17] M. N. Huhns and A. K. Malhotra. Negotiating for goods and services. *IEEE Internet Computing*, 3(4):97, 1999.
- [18] Y. Kondor. An old-new measure of income inequality. *Econometrica*, 39(6):1041–42, 1971.
- [19] J. Lesca and P. Perny. LP solvable models for multiagent fair allocation problems. In *Proceedings of the 19th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI-2010)*, pages 393–398, 2010.
- [20] H. Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge University Press, 1988.
- [21] J. F. Nash Jr. The bargaining problem. *Econometrica*, 18(2):155–162, 1950.
- [22] N.-T. Nguyen, T. T. Nguyen, M. Roos, and J. Rothe. Computational complexity and approximability of social welfare optimization in multiagent resource allocation. *Autonomous Agents and Multiagent Systems*, 28(2):256–289, 2014.
- [23] S. Ramezani and U. Endriss. Nash social welfare in multiagent resource allocation. In *Agent-Mediated Electronic Commerce: Designing Trading Strategies and Mechanisms for Electronic Markets*, volume 59 of *Lecture Notes in Business Information Processing*, pages 117–131. Springer-Verlag, 2010.
- [24] J. S. Rosenschein and G. Zlotkin. *Rules of Encounter: Designing Conventions for Automated Negotiation among Computers*. MIT Press, 1994.
- [25] T. W. Sandholm. Contract types for satisficing task allocation: I Theoretical results. In *Proceedings of the 1998 AAAI Spring Symposium on Satisficing Models*, 1998.
- [26] T. W. Sandholm. Distributed rational decision making. In G. Weiss, editor, *Multiagent Systems: A Modern Approach to Distributed Artificial Intelligence*, pages 201–258. MIT Press, 1999.
- [27] A. Sen. *On Economic Inequality*. Oxford University Press, 1973.
- [28] H. Theil. The information approach to demand analysis. *Econometrica*, 33(1):67–87, 1965.

B.2. On Simplified Group Activity Selection

On Simplified Group Activity Selection

Andreas Darmann¹ (✉), Janosch Döcker², Britta Dorn², Jérôme Lang³,
and Sebastian Schneckeburger²

¹ University of Graz, Graz, Austria
andreas.darmann@uni-graz.at

² University of Tübingen, Tübingen, Germany

³ Université Paris-Dauphine, Paris, France

Abstract. Several real-world situations can be represented in terms of agents that have preferences over activities in which they may participate. Often, the agents can take part in at most one activity (for instance, since these take place simultaneously), and there are additional constraints on the number of agents that can participate in an activity. In such a setting we consider the task of assigning agents to activities in a reasonable way. We introduce the simplified group activity selection problem providing a general yet simple model for a broad variety of settings, and start investigating the case where upper and lower bounds of the groups have to be taken into account. We apply different solution concepts such as envy-freeness and core stability to our setting and provide a computational complexity study for the problem of finding such solutions.

1 Introduction

Several real-world situations can be represented in terms of agents that have preferences over activities in which they may participate, subject to some feasibility constraints on the way they are assigned to the different activities. Here ‘activity’ should be taken in a wide sense; here are a few examples, each with its specificities which we will discuss further:

1. a group of co-workers may have to decide in which project to work, given that each project needs a fixed number of participants;
2. the participants to a big workshop, who are too numerous to fit all in a single restaurant, want to select a small number of restaurants (say, between two and four) out of a wider selection, with different capacities, and that serve different types of food, and to assign each participant to one of them;
3. a group of pensioners have to select two movies out of a wide selection, to be played simultaneously in two different rooms, and each of them will be able to see at most one of them;
4. a group of students have to choose one course each to follow out of a selection, given that each course opens only if it has a minimum number of registrants and has also an upper bound;

5. a set of voters want to select a committee of k representatives, given that each voter will be represented by one of the committee members.

While these examples seem to vary in several aspects, they share the same general structure: there is a set of *agents*, a set of available *activities*; each agent has preferences over the possible activities; there are constraints bearing on the selection of activities and the way agents are assigned to them; the goal is to assign each agent to one activity, respecting the constraints, and respecting as much as possible the agents' preferences.

Sometimes the set of selected activities is fixed (as Example 1), sometimes it will be determined by the agents' preferences. The nature of the constraints can vary: sometimes there are constraints that are *local* to each activity (typically, bounds on the number of participants, although we might imagine more complex constraints), as Examples 1, 2, 4, 5, and also 3 if the rooms have a capacity smaller than the number of pensioners; sometimes there are *global* constraints, that bear on the whole assignment (typically, bounds on the number of activities that can be selected; once again, we may consider more complex constraints), as in Examples 2, 3. Sometimes each agent *must* be assigned to an activity (as in Examples 1 and 5), sometimes she has the option of not being assigned to any activity.

This class of problems can be seen as a simplified version of the *group activity selection problem* (GASP), which asks how to assign agents to activities in a “good” way. In the original form introduced by Darmann et al. [5], agents express their preferences both on the activities and on the number of participants for the latter; in general, these preferences are expressed by means of weak orders over pairs “(activity, group size)”. Darmann [4] considers the variant of GASP in which the agents' preferences are strict orders over such pairs and analyzes the computational complexity of finding assignments that are stable or maximize the number of agents assigned to activities.

Our model considers a simplified version of the group activity selection problem, called s-GASP. Here, agents only express their preferences over the set of activities. However, the activities come with certain constraints, such as restrictions on the number of participants, concepts like balancedness, or more global restrictions. The goal is again to find a “good” assignment of agents to activities, respecting both the agents' preferences as well as the constraints.

But what is a good assignment? Clearly, this essentially depends on the application on hand, but there are several concepts in the social choice and game theory literature that propose for an evaluative solution. We consider two classes of criteria for assessing the quality of an assignment:

- *solution concepts* that mainly come from game theory and that aim at telling whether an assignment is stable enough (that is, immune to some types of deviations) to be implemented. First, *individual rationality* requires that each agent is assigned to an activity she likes better than not being assigned to any activity at all. Then, a solution concept considered both in hedonic games, where coalition building is studied, and in matching theory, is the notion

of *stability*. It asks whether the assignment is stable in the sense that no agent would want to or be able to deviate from her coalition, her match, or in our case, her assigned activity. Besides considering different variants of *core stability*, it also makes sense in our setting to investigate variations of *virtual stability*, meaning that it is not possible that an agent deviates from her assigned activity due to the given constraints.

- *criteria* that mainly come from social choice and that measure, qualitatively or quantitatively, the welfare of agents. A common quality measure in terms of efficiency of an assignment is the notion of *Pareto optimality*: there should be no feasible assignment in which there is an agent that is strictly better off, while the remaining agents do not change for the worse. More generally, one may wish to *optimize social welfare*, for some notion of utility derived from the agents' preferences: for instance, one may simply be willing to maximize the number of agents assigned to an activity. If fairness is important in the design, the notion of *envy-freeness* makes sense: an assignment respecting the constraints is envy-free if no agent strictly prefers the group another agent is assigned to.

Related Work. Apart from GASP, our model is related to various streams of work:

Course allocation, e.g. [2,6,10,14]. Students bear preferences over courses they would like to be enrolled in (these preferences are typically strict orders), and there are typically constraints given on the size of the courses. Courses will only be offered if a minimum number of participants is found, and there are upper bounds due to space or capacity limitations. In particular, Cechlárová and Fleiner [2] consider a course-allocation framework, so for them it makes sense that one agent can be matched to more than one activity (course), while [10,14] consider the case in which an agent can be assigned to at most one activity (project). The latter works are very close to our setting with constraints over group sizes. In contrast to above works however, our setting contains a dedicated outside option (the *void activity*), and agents' preferences are represented by weak orders over activities instead of strict rankings.

Hedonic games (see the recent survey by Aziz and Savani [1]) are coalition formation games where each agent has preferences over coalitions containing her. The stability notions we will focus on are derived from those for hedonic games. However, in our model, agents do not care about who else is assigned to the same activity as them, but only on the activity to which they are assigned to.¹

¹ Still, it is possible to express simplified group activity selection within the setting of hedonic games, by adding special agents corresponding to activities, who are indifferent between all locally feasible coalitions. See the work by Darmann et al. [5] for such a translation for the more general group activity selection problem. But it is a rather artificial, and overly complex, representation of our model, which moreover does not help characterizing and computing solution concepts.

In *multiwinner elections*, there is a set of candidates, voters have preferences over single candidates, and a subset of k candidates has to be elected. In some approaches to multiwinner elections, each voter is assigned to one of the members of the elected committee, who is supposed to represent her. Sometimes there are no constraints on the number of voters assigned to a given committee member (as is the case for the *Chamberlin-Courant* rule [3]), in which case each voter is assigned to her most preferred committee member; on the other hand, for the *Monroe* rule [13], the assignment has to be balanced. A more general setting, with more general constraints, has been defined by Skowron et al. [16]. Note also that multiwinner elections can also be interpreted as *resource allocation* with items that come in several units (see again [16]) and as *group recommendation* [12]. While assignment-based multiwinner elections problems are similar to simplified group activity, an important difference is that for the former, stability notions play no role, as the voters are not assumed to be able to deviate from their assigned representatives.

Contents and Outline. In this work, we will take into account various solution concepts and ask two questions: First, do “good” assignments exist? Can we decide this efficiently? And if they exist, can we find them efficiently? Our second concern is optimization: we are looking for desirable assignments that maximize the number of agents which can be assigned to an activity. Again, we may ask whether an assignment that is optimal in this sense exists, and we can try to find it.

We will focus on one family of constraints concerning the size of the groups—we assume that each activity comes with a lower and an upper bound on the number of participants—and give a detailed analysis of the described problems for this class.

Our results for this class are twofold. First, we show that it is often possible to find assignments with desirable properties in an efficient way: we propose several polynomial time algorithms to find good assignments or to optimize them. We complement these findings with NP- and coNP-completeness results for certain solution concepts. Whenever we encounter computational hardness, we identify tractable special cases: we will see that all our problems can be solved in polynomial time if there is no restriction on the minimum number of participants for the activities to take place. An overview of our computational complexity results is given in Table 1 in Sect. 3; due to space constraints, we do not elaborate all proofs. Second, we show that also in this class of problems considered, there is a certain tension between the concepts of envy-freeness and Pareto-optimality, even for small instances.

The remainder of this work is organized as follows. In Sect. 2, we formally introduce the simplified model as well as possible constraints and several solution concepts. Section 3 is the main part of the paper and provides an analysis of the computational complexity of the questions described above. Section 4 deals with the tension between envy-freeness and Pareto optimality. In Sect. 5, we conclude and discuss future directions of research connected to s-GASP.

2 Model, Constraints, and Solution Concepts

We start with defining our model and with introducing the solution concepts we want to consider.

Simplified Group Activity Selection, Constraints. An instance (N, A, P, R) of the *simplified group activity selection problem* (s-GASP) is given as follows. The set $N = \{1, \dots, n\}$ denotes a set of agents and $A = A^* \cup \{a_\emptyset\}$ a set of activities with $A^* = \{a_1, \dots, a_m\}$, where a_\emptyset stands for the *void activity*. An agent who is assigned to a_\emptyset can be thought of as not participating in any activity. The preference profile $P = \langle \succsim_1, \dots, \succsim_n \rangle$ consists of n votes (one for each agent), where \succsim_i is a weak order over A for each $i \in N$. The set R is a set of side constraints that restricts the set of assignments.

A mapping $\pi : N \rightarrow A$ is called an *assignment*. Given assignment π , $\#(\pi) = |\{i \in N : \pi(i) \neq a_\emptyset\}|$ denotes the number of agents π assigns to a non-void activity; for activity $a \in A$, $\pi^a := \{i \in N : \pi(i) = a\}$ is the set of agents π assigns to a .

The goal will be to find “good” assignments that satisfy the constraints in R . The structure of the set R depends on the application. Some typical kinds of constraints are (combinations of) the following cases:

1. each activity comes with a lower and/or upper bound on the number of participants;
2. no more than k activities can have some agent assigned to them;
3. the number of voters per activity should be balanced in some way;

Intuitively, if there are no constraints or the constraints are flexible enough, then agents go where they want and the problem becomes trivial. If the constraints are tight enough (e.g., perfect balancedness, provided $|A|$ and $|V|$ allow it), then some agents are generally not happy, but they are unable to deviate because most deviations violate the constraints. The interesting cases can therefore be in between these two extreme cases.

In this work, we will start investigations for s-GASP for the first class of constraints: We assume that each activity $a \in A^*$ comes with a lower bound $\ell(a)$ and an upper bound $u(a)$, and all constraints in R are of the following type: for each $a \in A^*$, $|\pi^a| \in \{0\} \cup [\ell(a), u(a)]$.

Feasible Assignments, Solution Concepts. Let an instance (N, A, P, R) of s-GASP be given. A *feasible assignment* is an assignment meeting the constraints in R . We will consider the following properties. A feasible assignment π is

- *envy-free* if there is no pair of agents $(i, j) \in N \times N$ with $\pi(j) \in A^*$ such that $\pi(j) \succ_i \pi(i)$ holds;
- *individually rational* if for each $i \in N$ we have $\pi(i) \succsim_i a_\emptyset$;

- *individually stable* if there is no agent i and no activity $a \in A$ such that (i) $a \succ_i \pi(i)$ and (ii) the mapping π' defined by $\pi'(i) = a$ and $\pi'(k) = \pi(k)$ for $k \in N \setminus \{i\}$ is a feasible assignment;
- *core stable* if there is no set $E \subseteq N$ and no activity $a \in A$ such that (i) $a \succ_i \pi(i)$ for all $i \in E$, (ii) $\pi^a \subset E$ holds if $a \in A^*$, and (iii) the mapping π' defined by $\pi'(i) = a$ for $i \in E$ and $\pi'(k) = \pi(k)$ for $k \in N \setminus E$ is a feasible assignment; (Note that the respective activity a to which the set E of agents wishes to deviate must be either a_\emptyset or currently unused.)
- *strictly core stable* if there is no set $E \subseteq N$ and no activity $a \in A$ such that (i) $a \succsim_i \pi(i)$ for all $i \in E$ where $a \succ_i \pi(i)$ for at least one $i \in E$, (ii) $\pi^a \subset E$ holds if $a \in A^*$, and (iii) the mapping π' defined by $\pi'(i) = a$ for all $i \in E$ and $\pi'(k) = \pi(k)$ for $k \in N \setminus E$ is a feasible assignment;
- *Pareto optimal* if there is no feasible assignment $\pi' \neq \pi$ such that $\pi'(i) \succsim_i \pi(i)$ for all $i \in N$ and $\pi'(i) \succ_i \pi(i)$ for at least one $i \in N$;

Finally, an individually rational assignment π is *maximum individually rational* if for all individually rational assignments π' we have $\#(\pi) \geq \#(\pi')$. Analogously, maximum feasible/envy-free/.../Pareto optimal assignments are defined.

For the class of constraints we consider, the notion of *virtual stability* is interesting. It requires that any deviation from the assigned towards a more preferred activity $a \in A^*$ violates the capacity constraints of a . Formally, we define the following stability concepts.

A feasible assignment π is

- *virtually individually stable* if there is no agent i and no activity $a \in A$ with $\ell(a) \leq |\pi^a| + 1 \leq u(a)$ such that $a \succ_i \pi(i)$ holds;
- *virtually core stable* if there is no set $E \subseteq N$ and no activity $a \in A$ with $\ell(a) \leq |E| \leq u(a)$ such that $a \succ_i \pi(i)$ for all $i \in E$, and (ii) $\pi^a \subset E$ holds if $a \in A^*$;
- *virtually strictly core stable* if there is no set $E \subseteq N$ and no activity $a \in A$ with $\ell(a) \leq |E| \leq u(a)$ such that (i) $a \succsim_i \pi(i)$ for all $i \in E$ where $a \succ_i \pi(i)$ for at least one $i \in E$, and (ii) $\pi^a \subset E$ holds if $a \in A^*$.

Note that as in the definition of core stability, also in virtual core stability the respective activity a to which the set E of agents wishes to deviate must be either a_\emptyset or currently unused.

The relationships between the solution concepts is shown in Fig. 1 (for an overview of the relationships between solution concepts in hedonic games we refer to [1]).

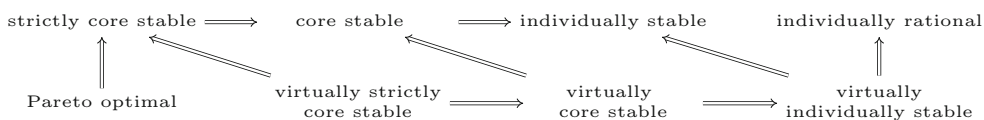


Fig. 1. Relations between the solution concepts we consider.

3 Computational Complexity for s-GASP with Group Size Constraints

We will now consider the computational complexity of s-GASP for various solution concepts. An overview of our results is given in Table 1.

Table 1. Overview of results for constraints $|\pi^a| \in \{0\} \cup [\ell(a), u(a)]$, $a \in A^*$.

Find assignment that is	general	$u(a) = n$	$\ell(a) = 1$
Feasible	in P (Proposition 1)	in P (Proposition 1)	in P (Proposition 1)
Individually rational	in P (Theorem 2)	in P (Theorem 2)	in P (Corollary 2)
Envy-free	in P (trivial)	in P (trivial)	in P (trivial)
Individually stable	in P (Theorem 1)	in P (Theorem 1)	in P (Corollary 2)
Core stable	in P (Theorem 1)	in P (Theorem 1)	in P (Corollary 2)
Strictly core stable	in P (Theorem 1)	in P (Theorem 1)	in P (Corollary 2)
Virtually individually stable	in P (Theorem 2)	in P (Theorem 2)	in P (Corollary 2)
Virtually core stable	NP-c (Corollary 1)	NP-c (Corollary 1)	in P (Corollary 2)
Virtually strictly core stable	NP-c (Theorem 3)	NP-c (Theorem 3)	in P (Corollary 2)
Pareto optimal	?	?	in P (Theorem 7)
Is there an assignment π with $\#(\pi) \geq k$ ($k \in \mathbb{N}$) that is	general	$u(a) = n$	$\ell(a) = 1$
Feasible	in P (Proposition 1)	in P (Proposition 1)	in P (Proposition 1)
Individually rational	NP-c (Theorem 4)	NP-c (Theorem 4)	in P (Theorem 5)
Envy-free	NP-c (Theorem 6)	in P (trivial)	?
Virtually individually stable	NP-complete	NP-complete	in P (Corollary 2)
Virtually core stable	NP-c (Corollary 1)	NP-c (Corollary 1)	in P (Corollary 2)
Virtually strictly core stable	NP-c (Theorem 3)	NP-c (Theorem 3)	in P (Corollary 2)
Pareto optimal	?	?	in P (Theorem 7)
Given assignment π , is π PO?	coNP-c (Theorem 8)	coNP-c (Theorem 8)	in P (Theorem 9)

3.1 Finding “Good” Assignments

The first interesting question is whether “good” assignments exist and how to find them. Obviously, assigning the void activity to every agent results in a feasible, individually rational and envy-free assignment. However, this is not a satisfying solution in terms of stability because agents will want to deviate. The good news is that for several stability concepts, a corresponding assignment always exists and can efficiently be found, as shown in the following theorem.

Theorem 1. *A strictly core stable assignment always exists and can be found in polynomial time.*

Proof. We sketch the basic algorithmic idea. Starting with a feasible assignment π , for each agent i and each activity b which i prefers to $\pi(i)$ we check whether there is a subset of agents including agent i that wants to deviate to b such that the resulting assignment is feasible. That is, we check whether there is a subset $E \supset \pi^b$ such that (i) for all $j \in E$ we have that $b \succ_j \pi(j)$ holds (recall that for agent i $b \succ_i \pi(i)$ holds) and (ii) π' with $\pi'(i) = b$ for $i \in E$ and $\pi'(j) = \pi(j)$ for $j \in N \setminus E$ is a feasible assignment. In order to do so, for each activity $c \in A \setminus \{b\}$, we compute the possible numbers of agents in the set π^c that agree with joining b and can be removed from π^c while still enabling a feasible assignment. Finally, given these numbers, we need to verify if—including i and the agents in π^b —these add up to an integer contained in $[\ell(b), u(b)]$ by taking exactly one number from each activity. The latter problem reduces to the MULTIPLE-CHOICE SUBSET-SUM problem (see Pisinger [15]), which, in our case, allows for an overall polynomial time algorithm for finding a strictly core stable assignment. ■

Recall that a strictly core stable assignment is also core stable and individually stable. Hence, as a consequence of the above theorem, also a core stable and an individually stable assignment always exist.

Theorem 2. *A virtually individually stable assignment always exists and can be found in polynomial time.*

Proof. In an instance (N, A, P, R) of s-GASP, we initially assign each agent to a_\emptyset , i.e., set $\pi(i) := a_\emptyset$ for $i \in N$. For $a \in A^*$ with $\ell(a) \geq 2$, if no agent is assigned to such a , then $\ell(a) \leq |\pi^a| + 1$ cannot hold. Hence, in what follows, we only consider activities $a \in A^*$ with $\ell(a) = 1$. For $1 \leq i \leq n$, assign agent i to the best ranked such activity $a \succ_i a_\emptyset$ with $|\pi^a| < u(a)$ and update π (i.e., set $\pi(i) := a$ while $\pi(j)$ remains unchanged for $j \in N \setminus \{i\}$). It is easy to see that the resulting assignment π is virtually individually stable. ■

In contrast, a virtually core stable (and thus a virtually strictly core stable) assignment does not always exist, as the following example shows.

Example 1. Let $N = \{1, 2, 3\}$ and $A^* = \{a, b, c\}$, with $a \succ_1 b \succ_1 c \succ a_\emptyset$, $b \succ_2 c \succ_2 a \succ a_\emptyset$, and $c \succ_3 a \succ_3 b \succ a_\emptyset$. The restrictions on the activities are given by $|\pi^x| \in \{0\} \cup [2, 3]$, for each $x \in A^*$. By the restrictions given, there is at most one non-void activity to which agents can be assigned. Clearly, for any activity $z \in A$ there is a $y \in A^*$ such that two agents prefer y to z . As a consequence, there can be no virtually core stable assignment.

In addition, the problem to decide whether or not a virtually strictly core stable assignment exists turns out to be computationally difficult.

Theorem 3. *It is NP-complete to decide if there is a virtually strictly core stable assignment, even when for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.*

Proof. Membership in NP is not difficult to verify. The proof proceeds by a reduction from EXACT COVER BY 3-SETS (X3C). The input of an instance of X3C consists of a pair $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$, where $X = \{1, \dots, 3q\}$ and $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_p\}$ is a collection of 3-element subsets of X ; the question is whether we can cover X with exactly q sets of \mathcal{Z} . X3C is known to be NP-complete even when each element of X is contained in exactly three sets of \mathcal{Z} (see [7, 8]); note that in such a case $p = 3q$ holds. For each $i \in X$, let the sets containing i be denoted by $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}$ with $i_1 < i_2 < i_3$.

Define instance $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ of s-GASP as follows. Let $N = \{V_{i,1}, V_{i,2}, V_{i,3} \mid 1 \leq i \leq p\}$ and $A^* = \{y_i, a_i, b_i, c_i \mid 1 \leq i \leq p\}$. For $1 \leq i \leq p$, let $\ell(a_i) = \ell(b_i) = \ell(c_i) = 2$, and $\ell(y_i) = 9$. For each $a \in A^*$, let $u(a) = |N|$. Since any virtually strictly core stable assignment is individually rational, in the profile P we omit the activities ranked below a_\emptyset ; for each $i \in \{1, \dots, p\}$, let the ranking of the agents $V_{i,1}, V_{i,2}, V_{i,3}$ (each of which represents element $i \in X$) be given as follows:

$$\begin{aligned} V_{i,1} &: y_{i_1} \succ_{i,1} y_{i_2} \succ_{i,1} y_{i_3} \succ_{i,1} a_i \succ_{i,1} b_i \succ_{i,1} c_i \succ_{i,1} a_\emptyset \\ V_{i,2} &: y_{i_2} \succ_{i,2} y_{i_3} \succ_{i,2} y_{i_1} \succ_{i,2} b_i \succ_{i,2} c_i \succ_{i,2} a_i \succ_{i,2} a_\emptyset \\ V_{i,3} &: y_{i_3} \succ_{i,3} y_{i_1} \succ_{i,3} y_{i_2} \succ_{i,3} c_i \succ_{i,3} a_i \succ_{i,3} b_i \succ_{i,3} a_\emptyset \end{aligned}$$

Note that each set Z contains three elements, and hence each y_i , $1 \leq i \leq p$, is preferred to a_\emptyset by exactly 9 agents. We show that there is an exact cover in instance $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ if and only if there is a virtually strictly core stable assignment in instance \mathcal{I} .

Assume there is an exact cover C . Consider the assignment π defined by $\pi(V_{i,h}) = y_j$ if $i \in Z_j$ and $Z_j \in C$, for $i \in \{1, \dots, p\}$ and $h \in \{1, 2, 3\}$. Since C is an exact cover, assignment π is well-defined and feasible; note that each agent is assigned to an activity she ranks first, second or third. In addition, note that for $Z_j \in C$, each agent that prefers y_j to a_\emptyset is assigned to y_j . Assume a set of agents E wishes to deviate to another activity d , such that at least one member $i \in E$ prefers d over $\pi(i)$ while there is no $j \in E$ with $\pi(j) \succ_j d$. By the definition of π , $d \in \{y_i \mid 1 \leq i \leq p\}$ holds. Observe that $\pi^d = \emptyset$ holds because C is an exact cover. Due to $\ell(d) = 9$, it hence follows that each agent of those who prefer d to a_\emptyset must prefer d to the assigned activity, which is impossible since, by construction of the instance, for at least one of these agents j the assigned activity is top-ranked, i.e., $\pi(j) \succ_j d$ holds. Therewith, π is virtually strictly core stable.

Conversely, assume there is a virtually strictly core stable assignment π . Assume that there is an agent $V_{i,h}$ who is not assigned to one of the activities $y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}$. Then, by $\ell(y_i) = 9$ and the fact that exactly 9 agents prefer y_i to a_\emptyset for each $i \in \{1, \dots, p\}$, it follows that no agent is assigned to one of $y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}$; in particular none of $V_{i,1}, V_{i,2}, V_{i,3}$ is assigned to one of these activities. Analogously to Example 1 it then follows that there is no virtually strictly core stable assignment, in contradiction with our assumption.

Thus, π assigns each agent $V_{i,h}$ to one of the activities $y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}$. For each $i \in \{1, \dots, p\}$, by $\ell(y_i) = 9$ and the fact that exactly 9 agents prefer y_i to a_\emptyset

it follows that to exactly one of $y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}$ exactly 9 agents are assigned, while no agent is assigned to the remaining two activities. As a consequence, the set $C = \{Z_i \mid |\pi^{y_i}| = 9, 1 \leq i \leq p\}$ is an exact cover in instance $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$. ■

In the instance considered in the above proof, an assignment is virtually strictly core stable if and only if it is virtually core stable. As a consequence, we get the following corollary.

Corollary 1. *It is NP-complete to decide if there is a virtually core stable assignment, even if for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.*

However, for the case of $\ell(a) = 1$ for each $a \in A^*$, we get a positive complexity result (see Sect. 3.2). In particular, we can show that in this case a virtually strictly core stable assignment that maximizes the number of agents assigned to a non-void activity can be found in polynomial time.

Turning to Pareto optimality, in the special case of $\ell(a) = 1$ for each $a \in A^*$, there is a simple algorithm to compute a Pareto optimal assignment. In that case, it is easy to see that a Pareto optimal assignment is always individually rational. Thus, neglecting activities ranked below a_\emptyset , we start with the assignment $\pi(i) = a_\emptyset$ for each $i \in N$ and iteratively assign an agent to the best-ranked among the activities a with $|\pi^a| < u(a)$. However, in the case of $\ell(a) = 1$ for each $a \in A^*$ we can even find a Pareto optimal assignment that maximizes the number of agents assigned to a non-void activity in polynomial time (see Sect. 3.2).

3.2 Maximizing the Number of Agents Assigned to a Non-void Activity

We now turn to an optimization problem: Among all feasible assignments that feature a certain property, one is usually interested in finding one that maximizes the number of agents that are assigned to a non-void activity, thus keeping the number of agents who cannot be enrolled in any activity low.

Proposition 1. *In polynomial time we can find a feasible assignment that maximizes the number of agents assigned to a non-void activity.*

But already for individual rational assignments, it is hard to decide whether all agents can be assigned to a non-void activity, as the following theorem shows. We omit its proof which is again a reduction from the EXACT COVER BY 3-SETS problem.

Theorem 4. *It is NP-complete to decide if there is an individually rational assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$, even if for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.*

However, if we assume that each activity admits a group size of 1, then we can find an optimal individually rational assignment efficiently.

Theorem 5. *If for each activity $a \in A^*$ we have $\ell(a) = 1$, then in polynomial time we can find a maximum individually rational assignment.*

Proof. Reduction to max integer flow with upper bounds. Given an instance $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ of \mathfrak{s} -GASP with $\ell(a) = 1$ for all $a \in A^*$, we construct an instance \mathcal{M} of max integer flow with directed graph $G = (V, E)$. Set $V := \{s, t\} \cup N \cup A^*$, and let the edges and their capacities be given as follows: for each $i \in N$, introduce edge (s, i) with capacity 1; for each $a \in A^*$ and $i \in N$ introduce an edge (i, a) of capacity 1 if $a \succsim_i a_\emptyset$ holds; for each $a \in A^*$, introduce edge (a, t) of capacity $u(a)$. It is easy to see that a max integer flow from s to t induces a maximum individually rational assignment in \mathcal{I} and vice versa. ■

For envy-freeness, optimizing the number of “active” agents turns again out to be a hard problem which can be shown by a reduction from EXACT COVER BY 3-SETS as well.

Theorem 6. *It is NP-complete to decide if there is an envy-free assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$.*

We obtain tractability for envy-freeness if we loosen the constraints on the upper bounds of the group sizes: Clearly, if there is an activity with “unlimited” capacity (i.e., its upper bound equals n), we can assign all agents to it and obtain envy-freeness.

3.3 Pareto Optimality

In this subsection, we consider the computational complexity involved in Pareto optimal assignments.

In the framework of course allocation, if all agents have strict preferences it is known that a Pareto optimal matching—that assigns an agent to an activity (course) only if the activity is acceptable for the agent—can be found in polynomial time (see [2, 10]). Since in our setting (i) the agents’ preferences are represented by weak orders and (ii) Pareto optimality does not require individual rationality, these results do not immediately translate. For the latter reason, the computational intractability result of [2] for finding a Pareto optimal matching maximizing the number of agents assigned to a non-void activity if each agent can be assigned to at most one activity does not immediately translate to our setting either. In particular, in general we do not know the computational complexity status of finding a Pareto optimal assignment (or of finding one that maximizes the number of agents assigned to non-void activities) in \mathfrak{s} -GASP. As the following theorem shows, the latter issue is computationally tractable if we relax the constraint on the lower bound of the group sizes.

Theorem 7. *If for each activity $a \in A^*$ we have $\ell(a) = 1$, then in polynomial time we can find a Pareto optimal assignment that maximizes the number of agents assigned to a non-void activity.*

Proof. In that case, any Pareto optimal assignment is individually rational. Let k be the maximum number of agents assigned to non-void activities by an individually rational assignment. Hence, it is sufficient to find a Pareto optimal

assignment π with $\#(\pi) = k$. Given an instance $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ of s-GASP with $\ell(a) = 1$ for all $a \in A^*$, we construct an instance \mathcal{F} of the minimum cost flow problem. Instance \mathcal{F} corresponds to instance \mathcal{M} of the proof of Theorem 5 except that we add the following edge costs: for each $a \in A^*$ and $i \in N$ edge (i, a) has cost $-(1 + |\{b \in A^* | a \succ_i b, b \succ_i a_\emptyset\}|)$, all remaining edges have zero cost. Let f be a minimum integer cost flow of size k in instance \mathcal{F} . Then f induces the assignment π by setting $\pi(i) = a$ iff f sends a unit of flow through edge (i, a) . Clearly, π is Pareto optimal since otherwise a flow f' of lower total cost than the total cost of f could be induced. ■

Note that in the case $\ell(a) = 1$ for each $a \in A^*$, also any strictly core stable, core stable, or individually stable assignment is individually rational. In addition, in this case virtually (strict) core stability coincides with (strict) core stability, and virtually individually stability coincides with individual stability. Hence we can state the following corollary.

Corollary 2. *If for each activity $a \in A^*$ we have $\ell(a) = 1$, then in polynomial time we can find a maximum individually rational assignment that is Pareto optimal, (virtually) individually stable, (virtually) core stable and (virtually) strictly core stable.*

However, checking whether a given assignment is Pareto optimal turns out to be coNP-complete, as Theorem 8 shows. We omit the proof which makes use of the NP-completeness of X3C.

Theorem 8. *It is coNP-complete to decide if a given assignment is Pareto optimal, even if for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.*

Again, if there are no restrictions on the minimum number of participants of each activity, the latter problem becomes tractable.

Theorem 9. *If for each activity $a \in A^*$ we have $\ell(a) = 1$, then in polynomial time we can decide if a given assignment is Pareto optimal.*

Proof. Given instance $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ of s-GASP with $\ell(a) = 1$ for all $a \in A^*$ and assignment π , we construct instance \mathcal{C} of the minimum cost flow problem as follows with lower and upper edge capacities. Note that π must be individually rational. In instance \mathcal{C} , the directed graph $G = (V, E)$, edge costs and capacities are given as follows. $G = (V, E)$ has vertex set $V := \{s, t\} \cup N \cup A^*$, the edge set E consists of the following edges:

- for $i \in N$, edge (s, i) of zero cost, and, for $a \in A^*$ with $a \succ_i \pi(i)$, edge (i, a) of cost -1 if $a \succ_i \pi(i)$ and of cost 0 if $a \sim_i \pi(i)$;
- for $a \in A^*$ edge (a, t) of upper capacity bound $u(a)$.

The lower and upper capacity bound of edge (s, i) is 1 iff $\pi(i) \succ a_\emptyset$ holds. Unless otherwise specified, the lower capacity bound of edge $e \in E$ is 0 and the upper capacity bound is 1 , and its cost is 0 .

Assume there is an integer flow f of negative total cost. Consider the assignment π' defined by $\pi'(i) = a$ iff f sends flow through edge (i, a) . Then, by construction we must have $\pi'(i) \sim_i \pi(i)$ or $\pi'(i) \succ_i \pi(i)$ for each $i \in N$, where the latter holds for at least one agent $i \in N$ by the negative total cost of f . Thus, π is not Pareto optimal.

If, on the other hand, π is not Pareto optimal, then there is an assignment π' with $\pi'(i) \sim_i \pi(i)$ or $\pi'(i) \succ_i \pi(i)$ for each $i \in N$, where the latter holds for at least one $i \in N$. The integer flow f' that sends flow along the edges $(s, i), (i, a), (a, t)$ iff $\pi'(i) = a$ holds, has negative total cost.

Therewith, for verifying if π is Pareto optimal it is sufficient to find an integer minimum cost flow in instance \mathcal{C} . ■

4 Envy-Freeness vs. Pareto Optimality

In many social choice settings, there is a tension between envy-freeness and Pareto optimality. This is also the case for our simplified group activity selection problem, as the following proposition and the subsequent corollary show.

Proposition 2. *For any $k \geq 2$, there is an instance (N, A, P, R) of s-GASP with $|N| = k$ and $\ell(a) = 1$ for each $a \in A^*$, for which there does not exist an assignment π which is both Pareto optimal and envy-free.*

Proof. We provide a proof for $k = 2$, which easily extends to $n = k$ for any $k > 2$. Consider the instance with $N = \{1, 2\}$, $A^* = \{a\}$, with the rankings $a \succ_1 a_\emptyset$ and $a \succ_2 a_\emptyset$, and the restrictions given by $\ell(a) = u(a) = 1$. Any Pareto optimal assignment assigns exactly one agent to a , which is clearly not envy-free. ■

Corollary 3. *There is no mechanism that determines an assignment that is both Pareto optimal and envy-free for each given instance (N, A, P, R) of s-GASP, even if $\ell(a) = 1$ holds for each $a \in A^*$.*

Interestingly, this tension also holds if the only relevant constraint is the lower bound of the activities (i.e., $u(a) = n$ for all a).

Proposition 3. *For any $k \geq 6$, there is an instance (N, A, P, R) of s-GASP with $|N| = k$ and $u(a) = k$ for each $a \in A^*$, for which there does not exist an assignment π which is both Pareto optimal and envy-free.*

Proof. We provide a proof for $k = 6$, which easily extends to $k = n$ for any $n > 6$. Consider the instance of s-GASP with $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A^* = \{a, b, c\}$ and for any $x \in A^*$ we have $\ell(x) = 3, u(x) = 6$. The rankings are

$$\begin{aligned} \succ_1: a \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 a_\emptyset & \quad \succ_4: a \succ_4 b \succ_4 c \succ_4 a_\emptyset \\ \succ_2: b \succ_2 c \succ_2 a \succ_2 a_\emptyset & \quad \succ_5: b \succ_5 c \succ_5 a \succ_5 a_\emptyset \\ \succ_3: c \succ_3 a \succ_3 b \succ_3 a_\emptyset & \quad \succ_6: c \succ_6 a \succ_6 b \succ_6 a_\emptyset \end{aligned}$$

Due to the feasibility constraints, there are only 4 types of feasible assignments:

- (i) 3–5 agents are assigned to the same activity $x \neq a_\emptyset$, and the rest to a_\emptyset .
- (ii) All agents are assigned to the void activity.
- (iii) All agents are assigned to the same activity $x \neq a_\emptyset$.
- (iv) 3 agents are assigned to the same activity $x \neq a_\emptyset$ and the other 3 agents are assigned to another activity $y \notin \{x, a_\emptyset\}$.

The assignments of type (i) and (ii) are Pareto dominated by some assignment of type (iii). An assignment π_1 of type (iii) is envy-free but not Pareto optimal. Due to the symmetrical construction of the preferences profiles, we can assume without loss of generality $\pi_1^a = N$. But then the assignment is Pareto dominated by the assignment π_2 with $\pi_2^a = \{1, 3, 4\}$ and $\pi_2^c = \{2, 5, 6\}$. An assignment of type (iv) cannot be envy-free. Without loss of generality we can assume $x = a$ and $y = b$. Assume, for the sake of contradiction, that there is an envy-free assignment. Agents 1 and 4 must be assigned to activity a and agents 2 and 5 to activity b . As the preference profiles of the remaining agents both rank a strictly better than b , the assignment cannot be an envy-free assignment. ■

Corollary 4. *There is no mechanism that determines an assignment that is both Pareto optimal and envy-free for each given instance (N, A, P, R) of s-GASP, even if $u(a) = n$ holds for each $a \in A^*$.*

5 Conclusion

We have formulated a simplified version of GASP where the assignment of agents to activities depends on the agents' preferences as well as on exogenous constraints. This model is powerful enough to capture many real world applications. We have made a first step by analyzing one family of constraints and have studied several solution concepts for this family.

An obvious next step is to drive a similar analysis for other interesting classes of constraints as described in Sect. 2. In particular, it would be interesting to characterize families of constraints guaranteeing or not guaranteeing existence of a stable solution for the different solution concepts we considered, or exploring forbidden structures that prevent stability. Also, it would be nice to provide a detailed analysis of the parameterized complexity of the hard cases, as done by Lee and Williams [11] for the stable invitation problem and by Igarashi et al. [9] for GASP on social networks. Another variant would be to consider typed agents as in the paper by Spradling and Goldsmith [17].

Acknowledgement. This work was partly supported by COST Action IC1205 on Computational Social Choice.

References

1. Aziz, H., Savani, R.: Hedonic games. In: Brandt, F., Conitzer, V., Endriss, U., Lang, J., Procaccia, A.D. (eds.) Handbook of Computational Social Choice. Cambridge University Press (2015). Chap. 15

2. Cechlárová, K., Fleiner, T.: Pareto optimal matchings with lower quotas. *Math. Soc. Sci.* **88**, 3–10 (2017)
3. Chamberlin, J.R., Courant, P.N.: Representative deliberations and representative decisions: proportional representation and the Borda rule. *Am. Polit. Sci. Rev.* **77**(3), 718–733 (1983)
4. Darmann, A.: Group activity selection from ordinal preferences. In: Walsh, T. (ed.) ADT 2015. LNCS (LNAI), vol. 9346, pp. 35–51. Springer, Cham (2015). doi:[10.1007/978-3-319-23114-3_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-23114-3_3)
5. Darmann, A., Elkind, E., Kurz, S., Lang, J., Schauer, J., Woeginger, G.: Group activity selection problem. In: Goldberg, P.W. (ed.) WINE 2012. LNCS, vol. 7695, pp. 156–169. Springer, Heidelberg (2012). doi:[10.1007/978-3-642-35311-6_12](https://doi.org/10.1007/978-3-642-35311-6_12)
6. Goto, M., Hashimoto, N., Iwasaki, A., Kawasaki, Y., Ueda, S., Yasuda, Y., Yokoo, M.: Strategy-proof matching with regional minimum quotas. In: Proceedings of the 2014 International Conference on Autonomous Agents and Multi-agent Systems, pp. 1225–1232. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems (2014)
7. Hein, J., Jiang, T., Wang, L., Zhang, K.: On the complexity of comparing evolutionary trees. *Discrete Appl. Math.* **71**, 153–169 (1996)
8. Hickey, G., Dehne, F., Rau-Chaplin, A., Blouin, C.: SPR distance computation for unrooted trees. *Evol. Bioinform.* **4**, 17–27 (2008)
9. Igarashi, A., Brederbeck, R., Elkind, E.: On parameterized complexity of group activity selection problems on social networks (2017). CoRR abs/1703.01121
10. Kamiyama, N.: A note on the serial dictatorship with project closures. *Oper. Res. Lett.* **41**(5), 559–561 (2013)
11. Lee, H., Williams, V.V.: Parameterized complexity of group activity selection. In: Proceedings of the 16th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS-2017), IFAAMAS, May 2017
12. Lu, T., Boutilier, C.: Budgeted social choice: From consensus to personalized decision making. In: IJCAI (2011)
13. Monroe, B.L.: Fully proportional representation. *Am. Polit. Sci. Rev.* **89**, 925–940 (1995)
14. Monte, D., Tumennasan, N.: Matching with quorums. *Econ. Lett.* **120**(1), 14–17 (2013)
15. Pisinger, D.: An $O(nr)$ Algorithm for the Subset Sum Problem. DIKU-Rapport, Datalogisk Institut, Københavns Universitet, Datalogisk Institut København (1995)
16. Skowron, P., Faliszewski, P., Slinko, A.M.: Achieving fully proportional representation: Approximability results. *Artif. Intell.* **222**, 67–103 (2015)
17. Spradling, M., Goldsmith, J.: Stability in role based hedonic games. In: Proceedings of the Twenty-Eighth International Florida Artificial Intelligence Research Society Conference, FLAIRS 2015, Hollywood, Florida, 18–20 May 2015, pp. 85–90 (2015)

B.3. Simplified Group Activity Selection

Simplified Group Activity Selection¹

Andreas Darmann, Janosch Döcker, Britta Dorn,
Jérôme Lang, Sebastian Schneckeburger

Abstract

Several real-world situations can be represented in terms of agents that have preferences over activities in which they may participate. Often, the agents can take part in at most one activity (for instance, since these take place simultaneously), and there are additional constraints on the number of agents that can participate in an activity. In such a setting we consider the task of assigning agents to activities in a reasonable way. We introduce the simplified group activity selection problem providing a general yet simple model for a broad variety of settings, and start investigating the case where upper and lower bounds of the groups have to be taken into account. We apply different solution concepts such as envy-freeness and core stability to our setting and provide a computational complexity study for the problem of finding such solutions.

1 Introduction

Several real-world situations can be represented in terms of agents that have preferences over activities in which they may participate, subject to some feasibility constraints on the way they are assigned to the different activities. In this respect, ‘activity’ should be taken in a wide sense; here are a few examples, each with its specificities which we will discuss further:

1. a group of co-workers may have to decide in which project to work, given that each project needs a fixed number of participants;
2. the participants to a big workshop, who are too numerous to fit all in a single restaurant, want to select a small number of restaurants (say, between two and four) out of a wider selection, with different capacities, and that serve different types of food, and to assign each participant to one of them;
3. a group of pensioners have to select two movies out of a wide selection, to be played simultaneously in two different rooms, and each of them will be able to see at most one of them;
4. a group of students have to choose one course each to follow out of a selection, given that each course opens only if it has a minimum number of registrants and has also an upper bound;
5. a set of voters want to select a committee of k representatives, given that each voter will be represented by one of the committee members.

While these examples seem to vary in several aspects, they share the same general structure: there is a set of *agents*, a set of available *activities*; each agent has preferences over the possible activities; there are constraints bearing on the selection of activities and the way agents are assigned to them; the goal is to assign each agent to one activity, respecting the constraints, and respecting as much as possible the agents’ preferences.

Sometimes the set of selected activities is fixed (as Example 1), sometimes it will be determined by the agents’ preferences. The nature of the constraints can vary: sometimes

¹A previous version of this paper appeared in the proceedings of ADT’17 [6].

there are constraints that are *local* to each activity (typically, bounds on the number of participants, although we might imagine more complex constraints), as Examples 1, 2, 4, and also 3 if the rooms have a capacity smaller than the number of pensioners; sometimes there are *global* constraints, that bear on the whole assignment (typically, bounds on the number of activities that can be selected; once again, we may consider more complex constraints), as in Examples 2, 3, 5. Sometimes each agent *must* be assigned to an activity (as in Example 1), sometimes she has the option of not being assigned to any activity.

This class of problems can be seen as a simplified version of the *group activity selection problem* (GASP), which asks how to assign agents to activities in a “good” way. In the original form introduced by Darmann et al. [7], agents express their preferences both on the activities and on the number of participants for the latter; in general, these preferences are expressed by means of weak orders over pairs “(activity, group size)”. Darmann [5] considers the variant of GASP in which the agents’ preferences are strict orders over such pairs and analyzes the computational complexity of finding assignments that are stable or maximize the number of agents assigned to activities.

Our model considers a simplified version of the group activity selection problem, called *s-GASP*. Here, agents only express their preferences over the set of activities. However, the activities come with certain constraints, such as restrictions on the number of participants, concepts like balancedness, or more global restrictions. The goal is again to find a “good” assignment of agents to activities, respecting both the agents’ preferences as well as the constraints.

But what is a good assignment? Clearly, this essentially depends on the application on hand, but there are several concepts in the social choice and game theory literature that propose for an evaluative solution. We consider two classes of criteria for assessing the quality of an assignment:

- *solution concepts* that mainly come from game theory and that aim at telling whether an assignment is stable enough (that is, immune to some types of deviations) to be implemented. First, *individual rationality* requires that each agent is assigned to an activity she likes better than not being assigned to any activity at all. Then, a solution concept considered both in hedonic games, where coalition building is studied, and in matching theory, is the notion of *stability*. It asks whether the assignment is stable in the sense that no agent would want to or be able to deviate from her coalition, her match, or in our case, her assigned activity. Besides considering different variants of *core stability*, it also makes sense in our setting to investigate variations of *virtual stability*, meaning that it is not possible that an agent deviates from her assigned activity due to the given constraints.
- *criteria* that mainly come from social choice theory and that measure, qualitatively or quantitatively, the welfare of agents. A common quality measure in terms of efficiency of an assignment is the notion of *Pareto optimality*: there should be no feasible assignment in which there is an agent that is strictly better off, while the remaining agents do not change for the worse. More generally, one may wish to *optimize social welfare*, for some notion of utility derived from the agents’ preferences: for instance, one may simply be willing to maximize the number of agents assigned to an activity. If fairness is important in the design, the notion of *envy-freeness* makes sense: an assignment respecting the constraints is envy-free if no agent strictly prefers the activity another agent is assigned to.

Related Work.

Apart from GASP, our model is related to various streams of work:

Course allocation, e.g. [3, 8, 14, 19]. Students bear preferences over courses they would like to be enrolled in (these preferences are typically strict orders), and there are usually constraints given on the size of the courses. Courses will only be offered if a minimum number of participants is found, and there are upper bounds due to space or capacity limitations. In particular, Cechlárová and Fleiner [3] consider a course-allocation framework, so for them it makes sense that one agent can be matched to more than one activity (course), while Kamiyama [14] and Monte and Tumennasan [19] consider the case in which an agent can be assigned to at most one activity (project). The latter works are very close to our setting with constraints over group sizes. In contrast to the above works however, our setting contains a dedicated outside option (the *void activity*), and agents’ preferences are represented by weak orders over activities instead of strict rankings.

Hedonic games (see the recent survey by Aziz and Savani [1]) are coalition formation games where each agent has preferences over coalitions containing her. The stability notions we will focus on are derived from those for hedonic games. However, in our model, agents do not care about who else is assigned to the same activity as them, but only on the activity to which they are assigned to.²

In *multiwinner elections*, there is a set of candidates, voters have preferences over single candidates, and a subset of k candidates has to be elected. In some approaches to multiwinner elections, each voter is assigned to one of the members of the elected committee, who is supposed to represent her. Sometimes there are no constraints on the number of voters assigned to a given committee member (as is the case for the *Chamberlin-Courant* rule [4]), in which case each voter is assigned to her most preferred committee member; on the other hand, for the *Monroe* rule [18], the assignment has to be balanced. A more general setting, with more general constraints, has been defined by Skowron et al. [21]. Note also that multiwinner elections can also be interpreted as *resource allocation* with items that come in several units ([21]) and as *group recommendation* ([17]). While assignment-based multiwinner elections problems are similar to simplified group activity selection, an important difference is that for the former, stability notions play no role, as the voters are not assumed to be able to deviate from their assigned representatives.

Contents and Outline.

In this work, we will take into account various solution concepts and ask two questions: First, do “good” assignments exist? Can we decide this efficiently? And if they exist, can we find them efficiently? Our second concern is optimization: we are looking for desirable assignments that maximize the number of agents which can be assigned to an activity. Again, we may ask whether an assignment that is optimal in this sense exists, and we can try to find it.

We will focus on one family of constraints concerning the size of the groups—we assume that each activity comes with a lower and an upper bound on the number of participants—and give a detailed analysis of the described problems for this class.

Our results for this class are twofold. First, we show that it is often possible to find assignments with desirable properties in an efficient way: we propose several polynomial time algorithms to find good assignments or to optimize them. We complement these findings with NP- and coNP-completeness results for certain solution concepts. Whenever we encounter computational hardness, we identify tractable special cases: we will see that basically all our problems can be solved in polynomial time if there is no restriction on

²Still, it is possible to express simplified group activity selection within the setting of hedonic games, by adding special agents corresponding to activities, who are indifferent between all locally feasible coalitions. See the work by Darmann et al. [7] for such a translation for the more general group activity selection problem. But it is a rather artificial, and overly complex, representation of our model, which moreover does not help characterizing and computing solution concepts.

the minimum number of participants for the activities to take place. An overview of our computational complexity results is given in Table 1 in Section 3; due to space constraints, we do not elaborate all proofs. Second, we show that also in this class of problems considered, there is a certain tension between the concepts of envy-freeness and Pareto optimality, even for small instances.

The remainder of this work is organized as follows. In Section 2, we formally introduce the simplified model as well as possible constraints and several solution concepts. Section 3 is the main part of the paper and provides an analysis of the computational complexity of the questions described above. Section 4 deals with the tension between envy-freeness and Pareto optimality. In Section 5, we conclude and discuss future directions of research connected to s-GASP.

2 Model, Constraints, and Solution Concepts

We start with defining our model and with introducing the solution concepts we want to consider.

2.0.1 Simplified Group Activity Selection, Constraints.

An instance (N, A, P, R) of the *simplified group activity selection problem* (s-GASP) is given as follows. The set $N = \{1, \dots, n\}$ denotes a set of agents and $A = A^* \cup \{a_\emptyset\}$ a set of activities with $A^* = \{a_1, \dots, a_m\}$, where a_\emptyset stands for the *void activity*. An agent who is assigned to a_\emptyset can be thought of as not participating in any activity. The preference profile $P = \langle \succsim_1, \dots, \succsim_n \rangle$ consists of n votes (one for each agent), where \succsim_i is a weak order over A (with strict part \succ_i and indifference part \sim_i) for each $i \in N$. The set R is a set of side constraints that restricts the set of assignments.

A mapping $\pi : N \rightarrow A$ is called an *assignment*. Given assignment π , $\#(\pi) = |\{i \in N : \pi(i) \neq a_\emptyset\}|$ denotes the number of agents π assigns to a non-void activity; for activity $a \in A$, $\pi^a := \{i \in N : \pi(i) = a\}$ is the set of agents π assigns to a .

The goal will be to find “good” assignments that satisfy the constraints in R . The structure of the set R depends on the application. Some typical kinds of constraints are (combinations of) the following cases:

1. each activity comes with a lower and/or upper bound on the number of participants;
2. no more than k activities can have some agent assigned to them;
3. the number of voters per activity should be balanced in some way.

Intuitively, if there are no constraints or the constraints are flexible enough, then agents go where they want and the problem becomes trivial. If the constraints are tight enough (e.g., perfect balancedness, provided $|A|$ and $|V|$ allow for it), then some agents are generally not happy, but they are unable to deviate because most deviations violate the constraints. The interesting cases can therefore be in between these two extreme cases.

In this work, we will start investigations for s-GASP for the first class of constraints: We assume that each activity $a \in A^*$ comes with a lower bound $\ell(a)$ and an upper bound $u(a)$, and all constraints in R are of the following type: for each $a \in A^*$, $|\pi^a| \in \{0\} \cup [\ell(a), u(a)]$. We lay particular focus on the special cases of $\ell(a) = 1$ and $u(a) = n$ respectively.

2.0.2 Feasible Assignments, Solution Concepts.

Let an instance (N, A, P, R) of s-GASP be given. A *feasible assignment* is an assignment meeting the constraints in R . We will consider the following properties. A feasible assignment π is

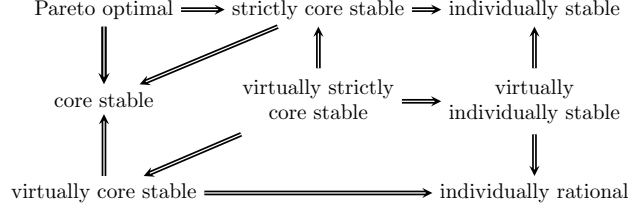


Figure 1: Relations between the solution concepts we consider.

- *envy-free* if there is no pair of agents $(i, j) \in N \times N$ with $\pi(j) \in A^*$ such that $\pi(j) \succ_i \pi(i)$ holds;
- *individually rational* if for each $i \in N$ we have $\pi(i) \succeq_i a_\emptyset$;
- *individually stable* if there is no agent i and no activity $a \in A$ such that (i) $a \succ_i \pi(i)$ and (ii) the mapping π' defined by $\pi'(i) = a$ and $\pi'(k) = \pi(k)$ for $k \in N \setminus \{i\}$ is a feasible assignment;
- *core stable* if there is no set $E \subseteq N$ and no activity $a \in A$ such that (i) $a \succ_i \pi(i)$ for all $i \in E$, (ii) $\pi^a \subset E$ holds if $a \in A^*$, and (iii) the mapping π' defined by $\pi'(i) = a$ for $i \in E$ and $\pi'(k) = \pi(k)$ for $k \in N \setminus E$ is a feasible assignment; (Note that the respective activity a to which the set E of agents wishes to deviate must be either a_\emptyset or currently unused.)
- *strictly core stable* if there is no set $E \subseteq N$ and no activity $a \in A$ such that (i) $a \succeq_i \pi(i)$ for all $i \in E$ where $a \succ_i \pi(i)$ for at least one $i \in E$, (ii) $\pi^a \subset E$ holds if $a \in A^*$, and (iii) the mapping π' defined by $\pi'(i) = a$ for all $i \in E$ and $\pi'(k) = \pi(k)$ for $k \in N \setminus E$ is a feasible assignment;
- *Pareto optimal* if there is no feasible assignment $\pi' \neq \pi$ such that $\pi'(i) \succeq_i \pi(i)$ for all $i \in N$ and $\pi'(i) \succ_i \pi(i)$ for at least one $i \in N$;

For the class of constraints we consider, the notion of *virtual stability* is interesting. It requires that any deviation from the assigned towards a more preferred activity a violates the capacity constraints of a . Formally, we define the following stability concepts (for the sake of conciseness we set $\ell(a_\emptyset) = 1$ and $u(a_\emptyset) = n$).

A feasible assignment π is

- *virtually individually stable* if there is no agent i and no activity $a \in A$ with $\ell(a) \leq |\pi^a| + 1 \leq u(a)$ such that $a \succ_i \pi(i)$ holds;
- *virtually core stable* if there is no set $E \subseteq N$ and no activity $a \in A$ with $\ell(a) \leq |E| \leq u(a)$ such that (i) $a \succ_i \pi(i)$ for all $i \in E$, and (ii) $\pi^a \subset E$ holds if $a \in A^*$;
- *virtually strictly core stable* if there is no set $E \subseteq N$ and no activity $a \in A$ with $\ell(a) \leq |E| \leq u(a)$ such that (i) $a \succeq_i \pi(i)$ for all $i \in E$ where $a \succ_i \pi(i)$ for at least one $i \in E$, and (ii) $\pi^a \subset E$ holds if $a \in A^*$.

Note that as in the definition of core stability, also in virtual core stability the respective activity a to which the set E of agents wishes to deviate must be either the void activity a_\emptyset or currently unused.

Finally, an individually rational assignment π is *maximum individually rational* if for all individually rational assignments π' we have $\#(\pi) \geq \#(\pi')$. Analogously, maximum feasible/envy-free/.../virtually strictly core stable assignments are defined.

The relationships between the solution concepts are shown in Figure 1. Notably for none of the relations the converse holds as well. As the following theorem shows, the technical

subtleties of the solution concepts lead to some surprising results. This also fixes an error in the corresponding figure in our previous work [6] where we wrongly claimed that (virtual) core stability implies (virtual) individual stability.

Theorem 1 *There are s-GASP-instances with assignments which are*

1. *(virtually) core stable but neither (virtually) individually stable nor (virtually) strictly core stable,*
2. *virtually strictly core stable but not Pareto optimal,*
3. *Pareto optimal but not virtually strictly core stable,*
4. *individually stable but not individually rational,*
5. *individually stable and individually rational but not virtually individually stable.*

Proof: We give a proof for the first statement and refer to the Appendix for the remaining ones. Let $A^* = \{a, b\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $a \succ_i b \succ_i a_\emptyset$ for $i \in \{1, 2\}$ and $b \succ_j a \succ_j a_\emptyset$ for $j \in \{3, 4\}$. Furthermore $\ell(a) = 1$ and $\ell(b) = 2$. The assignment π with $\pi^a = \{1\}$ and $\pi^b = \{2, 3, 4\}$ is not individually stable: the assignment π_* with $\pi_*^a = \{1, 2\}$ and $\pi_*^b = \{3, 4\}$ is an improvement for agent 2. The assignment π_* also contradicts strict core stability of π , as activity a and the coalition $E = \{1, 2\}$ meet the conditions. The assignment π is core stable: the only possible coalition would be $E = \{2\}$, but the transition to activity a is not permitted as a is neither the void activity nor unused under π . Analogously, it follows that π is also virtually core stable but neither virtually individually stable nor virtually strictly core stable. ■

3 Computational Complexity for s-GASP with Group Size Constraints

We will now consider the computational complexity of s-GASP for various solution concepts. An overview of our results is given in Table 1.

3.1 Finding “Good” Assignments

The first interesting question is whether “good” assignments exist and how to find them. Obviously, assigning the void activity to every agent results in a feasible, individually rational and envy-free assignment. However, this is not a satisfying solution in terms of stability because agents will want to deviate. The good news is that for several stability concepts, a corresponding assignment always exists and can efficiently be found.

Theorem 2 *A strictly core stable assignment always exists and can be found in polynomial time.*

Recall that a strictly core stable assignment is also core stable and individually stable. Hence, as a consequence of the above theorem, also a core stable and an individually stable assignment always exist and can efficiently be found. As it turns out, an analogous result holds for virtually individually stable assignments.

Theorem 3 *A virtually individually stable assignment always exists and can be found in polynomial time.*

find assignment that is	general	$u(a) = n$	$\ell(a) = 1$
feasible	in P (Prop 6)	in P (Prop 6)	in P (Prop 6)
individually rational	in P (Thm 3)	in P (Thm 3)	in P (Cor 19)
envy-free	in P (trivial)	in P (trivial)	in P (trivial)
individually stable	in P (Thm 2)	in P (Thm 2)	in P (Cor 19)
core stable	in P (Thm 2)	in P (Thm 2)	in P (Cor 19)
strictly core stable	in P (Thm 2)	in P (Thm 2)	in P (Cor 19)
virtually individually stable	in P (Thm 3)	in P (Thm 3)	in P (Cor 19)
virtually core stable	NP-c (Cor 5)	NP-c (Cor 5)	in P (Cor 19)
virtually strictly core stable	NP-c (Thm 4)	NP-c (Thm 4)	in P (Cor 19)
Pareto optimal	NP-h (Thm 17)	NP-h (Thm 17)	in P (Thm 18)
is there an assignment π with $\#(\pi) \geq k$ ($k \in \mathbb{N}$) that is	general	$u(a) = n$	$\ell(a) = 1$
feasible	in P (Prop 6)	in P (Prop 6)	in P (Prop 6)
individually rational	NP-c (Thm 7; Thm 10 of [3])	NP-c (Thm 7)	in P (Thm 8)
envy-free	NP-c (Thm 16)	in P (trivial)	?
individually stable	?	?	in P (Cor 19)
core stable	?	?	in P (Cor 19)
strictly core stable	NP-c (Thm 15)	NP-c (Thm 15)	in P (Cor 19)
virtually individually stable	NP-c (Thm 14)	NP-c (Thm 14)	in P (Cor 19)
virtually core stable	NP-c (Cor 5)	NP-c (Cor 5)	in P (Cor 19)
virtually strictly core stable	NP-c (Thm 4)	NP-c (Thm 4)	in P (Cor 19)
Pareto optimal	NP-h (Thm 20)	?	in P (Thm 18)

Table 1: Overview of results for constraints $|\pi^a| \in \{0\} \cup [\ell(a), u(a)]$, $a \in A^*$.

Proof: In an instance (N, A, P, R) of s-GASP, we initially assign each agent to a_\emptyset , i.e., set $\pi(i) := a_\emptyset$ for $i \in N$. For $a \in A^*$ with $\ell(a) \geq 2$, if no agent is assigned to such a , then $\ell(a) \leq |\pi^a| + 1$ cannot hold. Hence, in what follows, we only consider activities $a \in A^*$ with $\ell(a) = 1$. For $1 \leq i \leq n$, assign agent i to the best ranked such activity $a \succ_i a_\emptyset$ with $|\pi^a| < u(a)$ and update π (i.e., set $\pi(i) := a$ while $\pi(j)$ remains unchanged for $j \in N \setminus \{i\}$). It is easy to see that the resulting assignment π is virtually individually stable. ■

In contrast, a virtually core stable (and thus a virtually strictly core stable) assignment does not always exist as Example 26 (see appendix) shows; in particular, the problem to decide whether or not a virtually strictly core stable assignment exists turns out to be computationally difficult.

Theorem 4 *It is NP-complete to decide if there is a virtually strictly core stable assignment, even when for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.*

In the instance considered in proof of the above theorem (see Appendix), an assignment is virtually strictly core stable if and only if it is virtually core stable. As a consequence, we get the following corollary.

Corollary 5 *It is NP-complete to decide if there is a virtually core stable assignment, even if for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.*

However, for the case of $\ell(a) = 1$ for each $a \in A^*$, we get a positive complexity result (see Section 3.2). In particular, we can show that in this case a virtually strictly core stable

assignment that maximizes the number of agents assigned to a non-void activity can be found in polynomial time.

Turning to Pareto optimality, in the special case of $\ell(a) = 1$ for each $a \in A^*$, there is a simple algorithm to compute a Pareto optimal assignment. In that case, it is easy to see that a Pareto optimal assignment is always individually rational. Thus, neglecting activities ranked below a_\emptyset , we start with the assignment $\pi(i) = a_\emptyset$ for each $i \in N$ and iteratively assign an agent to the best-ranked among the activities a with $|\pi^a| < u(a)$. However, in the case of $\ell(a) = 1$ for each $a \in A^*$ we can even find a Pareto optimal assignment that maximizes the number of agents assigned to a non-void activity in polynomial time (see Section 3.2).

3.2 Maximizing the Number of Agents Assigned to a Non-Void Activity

We now turn to an optimization problem: Among all feasible assignments that feature a certain property, one is usually interested in finding one that maximizes the number of agents that are assigned to a non-void activity, thus keeping the number of agents who cannot be enrolled in any activity low.

3.2.1 Feasible and Individually Rational Assignments

On the positive side, if we are only interested in a feasible assignment maximizing the number of agents assigned to a non-void activity, we can find such an assignment in polynomial time.

Proposition 6 *In polynomial time we can find a feasible assignment that maximizes the number of agents assigned to a non-void activity.*

But already for individual rational assignments it is hard to decide whether all agents can be assigned to a non-void activity.

Theorem 7 *It is NP-complete to decide if there is an individually rational assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$, even if for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.*

However, if we assume that each activity admits a group size of 1, then we can find an optimal individually rational assignment efficiently.

Theorem 8 *If for each activity $a \in A^*$ we have $\ell(a) = 1$, then in polynomial time we can find a maximum individually rational assignment.*

Proof: Reduction to max integer flow with upper bounds. Given an instance $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ of s-GASP with $\ell(a) = 1$ for all $a \in A^*$, we construct an instance \mathcal{M} of max integer flow with directed graph $G = (V, E)$. Set $V := \{s, t\} \cup N \cup A^*$, and let the edges and their capacities be given as follows: for each $i \in N$, introduce edge (s, i) with capacity 1; for each $a \in A^*$ and $i \in N$ introduce an edge (i, a) of capacity 1 if $a \succsim_i a_\emptyset$ holds; for each $a \in A^*$, introduce edge (a, t) of capacity $u(a)$. It is easy to see that a max integer flow from s to t induces a maximum individually rational assignment in \mathcal{I} and vice versa. ■

In the remainder of this subsection, we consider a special kind of constraints. We assume that for each activity, the upper bound equals the lower bound, i.e., for all activities $a \in A^*$ we have $\ell(a) = u(a) = q$ for some $q \in \mathbb{N}$ —an activity can only take place if exactly q agents sign up for it. In this case, maximizing the number of agents assigned to an activity is the same as maximizing the number of activities that can take place. These constraints

can also be thought of as asking for some kind of balancedness (hence can also be seen as belonging to type 3 of the constraints presented in Section 2.0.1) and seem natural in many applications: For example, for $q = 1$, the time slots available for taking an oral exam with a teacher can be seen as activities on which students express their preferences. Each student can only be assigned to one of these dates. For $q = 2$, the activities could be squash courts or climbing routes and can only be used by pairs of agents. In both settings, one is interested in satisfying as many students/players as possible (as well as in charging the maximum number of time slots/courts or routes).

Finding maximum individually rational assignments for such settings turns out to be solvable in polynomial time for $q = 1$. The same holds for two-player activities ($q = 2$). In contrast, for $q \geq 3$, the problem becomes NP-complete.

We will also make use of the following notation: Let $A' \subseteq A^*$ be a subset of non-void activities. The notation $A' \succsim_i a_\emptyset$ denotes that agent i does not strictly prefer the void activity compared to any of the activities in A' . When we use this notation to define a preference order for an agent i it means that we may choose any order of these activities such that $a \succsim_i a_\emptyset$ for all $a \in A'$ and $a_\emptyset \succsim_i b$ for all $b \in A \setminus A'$.

Theorem 9 *Let $q \in \{1, 2\}$. Further, let $\ell(a) = u(a) = q$ for each activity $a \in A^*$. Then, we can compute a maximum individually rational assignment in polynomial time.*

Proof: We show that any instance of s-GASP with $\ell(a) = u(a) = q$ for each activity $a \in A^*$ can be reduced to MAXIMUM MATCHING in polynomial time. Let $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ be such an instance of s-GASP.

Let us first consider the case $q = 1$. We construct a bipartite graph $G = (V_N \cup V_A, E)$ as follows: Let $V_N := \{v_i \mid i \in N\}$ and $V_A := \{v_a \mid a \in A^*\}$, i.e., we create a vertex v_i for each agent $i \in N$ and a vertex v_a for each activity $a \in A^*$. For each pair $(v_i, v_a) \in V_N \times V_A$ we create the edge $\{v_i, v_a\} \in E$ if and only if agent i ranks activity a higher than the void activity. It is easy to see that a maximum matching in the constructed graph corresponds to a maximum individually rational assignment for the given instance of s-GASP.

Let us now consider the case $q = 2$. We construct a graph $G = (V_N \cup V_A \cup V_{A'}, E)$ as follows: First, we create the same vertex sets V_N and V_A as in the previous case. Then, we create another vertex set $V_{A'} := \{v'_a \mid a \in A^*\}$ that contains a copy of each vertex in V_A , i.e., each activity $a \in A^*$ is represented by exactly two vertices. Informally, v_a and v'_a represent the two available places of each activity and each agent that is interested in the activity is therefore interested in both of these places. For each activity $a \in A^*$ and each agent $i \in N$, we create the edges $\{v_i, v_a\} \in E$ and $\{v_i, v'_a\} \in E$ if and only if agent i ranks the activity a higher than the void activity (this preference does not have to be strict). Additionally, we create the edges $\{v_a, v'_a\} \in E$ for each activity $a \in A^*$. Note that the graph is not bipartite anymore. W.l.o.g. we can assume that for each activity $a \in A^*$ a maximum matching in the constructed graph either contains $\{v_a, v'_a\}$ or two edges $\{v_i, v_a\}, \{v_j, v'_a\}$ for some $i, j \in N$ with $i \neq j$ (if only one of the vertices v_a, v'_a is matched, we simply replace the corresponding edge with $\{v_a, v'_a\}$). The first part represents that no agent is assigned to activity a and the second part that agents i and j are both assigned to a . It is easy to see that such a maximum matching corresponds to a maximum individually rational assignment for the given instance of s-GASP (see Figure 2 in the Appendix for an example). ■

Corollary 10 *Let $q \in \{1, 2\}$. Further, let $\ell(a) = u(a) = q$ for each activity $a \in A^*$. Then, we can decide in polynomial time if there is an individually rational assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$.*

The above result also holds for the case that the groups sizes are all in the interval $[1, 2]$ (see Appendix).

Corollary 11 *Let $1 \leq \ell(a) \leq u(a) \leq 2$ for each activity $a \in A^*$. Then, we can decide in polynomial time if there is an individually rational assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$.*

Theorem 12 *Let $q \geq 3$. It is NP-complete to decide if there is an individually rational assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$, even if for each activity $a \in A^*$ we have $\ell(a) = u(a) = q$.*

Proof: Membership in NP is easy to see. We show NP-hardness by reduction from PERFECT H-MATCHING, where we are given a graph $G = (V, E)$ and a second graph H . The task is to cover the graph G with vertex-disjoint copies of H , i.e., the vertex sets of the copies of H must be a partition of V . The problem to decide if such a cover exists is NP-complete for all graphs H containing a component with at least three vertices [15] (our notation is similar to Berman et al. [2]). Given an instance of PERFECT H-MATCHING, where H is the complete graph on q vertices (i.e., a *clique* of size q), we construct the instance of s-GASP as follows.

Let $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ be the set of vertices of G . Further, let c_q be the number of cliques of size q in G and let $\mathcal{C} := \{C_j \mid 1 \leq j \leq c_q\}$ be the corresponding subsets of vertices. Note that \mathcal{C} can be computed in polynomial time since q is a constant. For each clique $C_j \in \mathcal{C}$ we create an activity a_j . The set A of activities is then $A = \{a_\emptyset\} \cup \bigcup_{j=1}^{c_q} \{a_j\}$. Then, we create an agent i for each vertex v_i and construct her preference as follows: Let A_i^+ be the set of activities corresponding to the cliques $\{C_j \subseteq \mathcal{C} \mid v_i \in C_j\}$, i.e., the cliques of size q that contain the vertex v_i . Then, we set $A_i^+ \succ_i a_\emptyset \succ_i A \setminus A_i^+$, where the ranking of the activities in A_i^+ and $A \setminus A_i^+$ can be chosen arbitrarily. The restrictions R are given by $|\pi^a| \in \{0, q\}$ for all $a \in A^*$. Then there exists a vertex-disjoint cover of G if and only if there is an individually rational assignment as required.

“ \Rightarrow ” Let $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ cover the graph with vertex-disjoint copies of the complete graph with q vertices. For each clique $C_j \in \mathcal{S}$, we assign all agents i where $v_i \in C_j$ to the activity a_j . By construction, the restrictions are satisfied and each agent is assigned to exactly one (non-void) activity ranked higher than the void activity. Hence, the assignment is individually rational.

“ \Leftarrow ” Let π be an individually rational assignment of the agents to non-void activities that satisfies $|\pi^a| \in \{0, q\}$ for each activity $a \in A^*$. Let \mathcal{J} be the set of indices of the activities a_j with $|\pi^{a_j}| = q$. Then, $\mathcal{S} = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{C_j\}$ covers the graph G with vertex-disjoint copies of the complete graph with q vertices (this follows from the fact that each agent is assigned to exactly one non-void activity). ■

Corollary 13 *Let $q \geq 3$ and $k \in \mathbb{N}$. It is NP-complete to decide if there is an individually rational assignment that assigns at least k agents to activities, even if for each activity $a \in A^*$ we have $\ell(a) = u(a) = q$.*

3.2.2 Stable and Envy-Free Assignments

Unfortunately, deciding whether or not there is a virtually individually stable or strictly core stable assignment exists turns out to be computationally hard even if the upper bound of each activity equals n .

Theorem 14 *It is NP-complete to decide if there is a virtually individually stable assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$, even if for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.*

Theorem 15 *It is NP-complete to decide if there is a strictly core stable assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$, even if for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.*

For envy-freeness, maximizing the number of “active” agents turns again out to be hard.

Theorem 16 *It is NP-complete to decide if there is an envy-free assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$.*

However, we obtain tractability for envy-freeness if we loosen the constraints on the upper bounds of the group sizes: Clearly, if there is an activity with “unlimited” capacity (i.e., its upper bound equals n), we can assign all agents to it and obtain envy-freeness. It is not clear yet whether the problem becomes tractable if $\ell(a) = 1$ holds for all $a \in A^*$. This is the case though if all preference orders are strict (see Proposition 27 in Appendix).

3.3 Pareto Optimality

In this subsection, we consider the computational complexity involved in maximizing the number of agents assigned to non-void activities in Pareto optimal assignments. In the framework of course allocation, if all agents have strict preferences, it is known that a Pareto optimal matching—that assigns an agent to an activity (course) only if the activity is acceptable for the agent—can be found in polynomial time ([3, 14]). Since in our setting (i) the agents’ preferences are represented by weak orders and (ii) Pareto optimality does not require individual rationality, these results do not immediately translate. For the latter reason, the computational intractability result by Cechlárová and Fleiner [3] (for finding a Pareto optimal matching maximizing the number of agents assigned to a non-void activity if each agent can be assigned to at most one activity) does not immediately translate to our setting either. Our first results shows that finding a Pareto optimal assignment (or of finding one that maximizes the number of agents assigned to non-void activities) in s-GASP is NP-hard even for the case $u(a) = n$ for each activity a .

Theorem 17 *It is NP-hard to find a Pareto optimal assignment in an instance of s-GASP, even when $u(a) = n$ for each $a \in A^*$.*

However, as the following theorem shows, if we relax the constraints on the lower bound of the group sizes the problem of finding a Pareto optimal assignment becomes computationally tractable.

Theorem 18 *If for each activity $a \in A^*$ we have $\ell(a) = 1$, then in polynomial time we can find a Pareto optimal assignment that maximizes the number of agents assigned to a non-void activity.*

Note that in the case $\ell(a) = 1$ for each $a \in A^*$, also any strictly core stable, core stable, or individually stable assignment is individually rational. In addition, in this case virtual (strict) core stability coincides with (strict) core stability, and virtually individual stability coincides with individual stability. Hence we can state the following corollary.

Corollary 19 *If for each activity $a \in A^*$ we have $\ell(a) = 1$, then in polynomial time we can find a maximum individually rational assignment that is Pareto optimal, (virtually) individually stable, (virtually) core stable and (virtually) strictly core stable.*

However, as the following theorem shows, in contrast to the case of the lower bound being 1 for each activity (Theorem 18), in general it turns out to be computationally hard to decide if there is a Pareto optimal assignment that assigns each agent to a non-void activity.

Theorem 20 *It is NP-hard to decide if there is a Pareto optimal assignment that assigns each agent to a non-void activity.*

4 Envy-Freeness versus Pareto Optimality

In many social choice settings, there is a tension between envy-freeness and Pareto optimality. This is also the case for our simplified group activity selection problem, as the following propositions show.

Proposition 21 *For any $k \geq 2$, there is an instance (N, A, P, R) of \mathfrak{s} -GASP with $|N| = k$ and $\ell(a) = 1$ for each $a \in A^*$, for which there does not exist an assignment π which is both Pareto optimal and envy-free.*

Proof: We provide a proof for $k = 2$, which easily extends to $n = k$ for any $k > 2$. Consider the instance with $N = \{1, 2\}$, $A^* = \{a\}$, with the rankings $a \succ_1 a_\emptyset$ and $a \succ_2 a_\emptyset$, and the restrictions given by $\ell(a) = u(a) = 1$. Any Pareto optimal assignment assigns exactly one agent to a , which is clearly not envy-free. ■

Interestingly, this tension also holds if the only relevant constraint is the lower bound of the activities (i.e., $u(a) = n$ for all a).

Proposition 22 *For any $k \geq 6$, there is an instance (N, A, P, R) of \mathfrak{s} -GASP with $|N| = k$ and $u(a) = k$ for each $a \in A^*$, for which there does not exist an assignment π which is both Pareto optimal and envy-free.*

Proof: We provide the idea of the proof for $k = 6$ and refer to the Appendix for details. Consider the instance of \mathfrak{s} -GASP with $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A^* = \{a, b, c\}$ and for any $x \in A^*$ we have $\ell(x) = 3, u(x) = 6$. The rankings are

$$\begin{array}{ll} \succ_1: & a \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 a_\emptyset & \succ_4: & a \succ_4 b \succ_4 c \succ_4 a_\emptyset \\ \succ_2: & b \succ_2 c \succ_2 a \succ_2 a_\emptyset & \succ_5: & b \succ_5 c \succ_5 a \succ_5 a_\emptyset \\ \succ_3: & c \succ_3 a \succ_3 b \succ_3 a_\emptyset & \succ_6: & c \succ_6 a \succ_6 b \succ_6 a_\emptyset \end{array} .$$

Due to the feasibility constraints, there are only 4 types of feasible assignments, none of which is both envy-free and Pareto optimal. ■

5 Conclusion

We have formulated a simplified version of GASP where the assignment of agents to activities depends on the agents' preferences as well as on exogenous constraints. This model is powerful enough to capture many real world applications. We have made a first step by analyzing one family of constraints and have studied several solution concepts for this family.

An obvious next step is to drive a similar analysis for other interesting classes of constraints as described in Section 2. In particular, it would be interesting to characterize families of constraints guaranteeing or not guaranteeing existence of a stable solution for the different solution concepts we considered, or exploring forbidden structures that prevent stability. Also, it would be nice to provide a detailed analysis of the parameterized complexity of the hard cases, as done by Lee and Williams [16] for the stable invitation problem, and by Igarashi et al. [12, 13] and Gupta et al.[9] for GASP on social networks. Another variant would be to consider typed agents as in the work by Spradling and Goldsmith [22].

Acknowledgement. We thank Henning Fernau for pointing us to the construction that helped to prove Theorem 9.

References

- [1] H. Aziz and R. Savani. Hedonic games. In F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang, and A. D. Procaccia, editors, *Handbook of Computational Social Choice*, chapter 15. Cambridge University Press, 2015.
- [2] F. Berman, D. Johnson, T. Leighton, P.W. Shor, and L. Snyder. Generalized planar matching. *Journal of Algorithms*, 11(2):153 – 184, 1990.
- [3] K. Cechlárová and T. Fleiner. Pareto optimal matchings with lower quotas. *Mathematical Social Sciences*, 88:3 – 10, 2017.
- [4] J. R. Chamberlin and P. N. Courant. Representative deliberations and representative decisions: proportional representation and the Borda rule. *American Political Science Review*, 77(3):718–733, 1983.
- [5] A. Darmann. Group activity selection from ordinal preferences. In T. Walsh, editor, *Algorithmic Decision Theory: 4th International Conference, ADT 2015, Lexington, KY, USA, Proceedings*, pages 35–51. Springer International Publishing, 2015.
- [6] A. Darmann, J. Döcker, B. Dorn, J. Lang, and S. Schneckenburger. On simplified group activity selection. In *Algorithmic Decision Theory - 5th International Conference, ADT 2017, Luxembourg, October 25-27*, pages 255–269, 2017.
- [7] A. Darmann, E. Elkind, S. Kurz, J. Lang, J. Schauer, and G. Woeginger. Group activity selection problem. In P. Goldberg, editor, *Internet and Network Economics*, volume 7695 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 156–169. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [8] M. Goto, N. Hashimoto, A. Iwasaki, Y. Kawasaki, S. Ueda, Y. Yasuda, and M. Yokoo. Strategy-proof matching with regional minimum quotas. In *Proceedings of the 2014 international conference on Autonomous agents and multi-agent systems*, pages 1225–1232. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2014.
- [9] S. Gupta, S. Roy, S. Saurabh, and M. Zehavi. Group activity selection on graphs: Parameterized analysis. In Vittorio Bilò and Michele Flammini, editors, *Algorithmic Game Theory*, pages 106–118, Cham, 2017. Springer International Publishing.
- [10] J. Hein, T. Jiang, L. Wang, and K. Zhang. On the complexity of comparing evolutionary trees. *Discrete Applied Mathematics*, 71:153–169, 1996.
- [11] G. Hickey, F. Dehne, A. Rau-Chaplin, and C. Blouin. SPR distance computation for unrooted trees. *Evolutionary Bioinformatics*, 4, 2008.
- [12] A. Igarashi, R. Brederbeck, and E. Elkind. On parameterized complexity of group activity selection problems on social networks. In *Proceedings of the 16th Conference on Autonomous Agents and MultiAgent Systems (AAMAS '17)*, pages 1575–1577, 2017.
- [13] A. Igarashi, D. Peters, and E. Elkind. Group activity selection on social networks. In *Proceedings of the 31st AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI'17)*, pages 565–571, 2017.
- [14] N. Kamiyama. A note on the serial dictatorship with project closures. *Operations Research Letters*, 41(5):559–561, 2013.

- [15] D.G. Kirkpatrick and P. Hell. On the completeness of a generalized matching problem. In *Proceedings of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '78, pages 240–245. ACM, 1978.
- [16] H. Lee and V. Williams. Parameterized complexity of group activity selection. In *Proceedings of the 16th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS-2017)*. IFAAMAS, May 2017.
- [17] T. Lu and C. Boutilier. Budgeted social choice: From consensus to personalized decision making. In *IJCAI*, 2011.
- [18] B. L. Monroe. Fully proportional representation. *American Political Science Review*, 89:925–940, 1995.
- [19] D. Monte and N. Tumennasan. Matching with quorums. *Economics Letters*, 120(1):14–17, 2013.
- [20] D. Pisinger. *An $O(nr)$ Algorithm for the Subset Sum Problem*. Datalogisk Institut København: DIKU-Rapport. Datalogisk Institut, Københavns Universitet, 1995.
- [21] P. Skowron, P. Faliszewski, and A. Slinko. Achieving fully proportional representation: Approximability results. *Artif. Intell.*, 222:67–103, 2015.
- [22] M. Spradling and J. Goldsmith. Stability in role based hedonic games. In *Proceedings of the Twenty-Eighth International Florida Artificial Intelligence Research Society Conference, FLAIRS 2015, Hollywood, Florida. May 18-20, 2015.*, pages 85–90, 2015.

Andreas Darmann
 University of Graz
 Graz, Austria
 Email: andreas.darmann@uni-graz.at

Janosch Döcker
 University of Tübingen
 Tübingen, Germany
 Email: janosch.doecker@uni-tuebingen.de

Britta Dorn
 University of Tübingen
 Tübingen, Germany
 Email: britta.dorn@uni-tuebingen.de

Jérôme Lang
 Université Paris-Dauphine
 Paris, France
 Email: jerome.lang@irit.fr

Sebastian Schneckeburger
 University of Tübingen
 Tübingen, Germany
 Email: sebastian.schneckenburger@uni-tuebingen.de

Appendix

Proofs of Section 1

Theorem 1. There are s-GASP-instances with assignments which are

1. (virtually) core stable but neither (virtually) individually stable nor (virtually) strictly core stable,
2. virtually strictly core stable but not Pareto optimal,
3. Pareto optimal but not virtually strictly core stable,
4. individually stable but not individually rational,
5. individually stable and individually rational but not virtually individually stable.

Proof: Below, we give three examples which show that Statements 2-5 hold. Example 23 shows Statement 2. Example 24 shows Statement 3 and Statement 4. Finally, Example 25 shows that Statement 5 holds. ■

Example 23 Let $N = \{1, 2\}$, $A^* = \{a, b\}$ with $\forall x \in A^* : \ell(x) = 1 = u(x)$. Consider the following preference profile:

$$\begin{aligned} \succsim_1: & a \succ_1 \mathbf{b} \succ_1 a_\emptyset \\ \succsim_2: & b \succ_2 \mathbf{a} \succ_2 a_\emptyset \end{aligned}$$

Then, the assignment π with $\pi(1) = b$ and $\pi(2) = a$ is virtually strictly core stable but not Pareto optimal.

Example 24 Let $N = \{1, 2\}$, $A^* = \{a, b\}$ with $\forall x \in A^* : \ell(x) = 2 = u(x)$ and the following preference profile:

$$\begin{aligned} \succsim_1: & \mathbf{a} \succ_1 a_\emptyset \succ_1 b \\ \succsim_2: & b \succ_2 a_\emptyset \succ_2 \mathbf{a} \end{aligned}$$

Assignment π with $\pi^a = \{1, 2\}$ is Pareto optimal and individually stable, but neither virtually strictly core stable nor individually rational.

Example 25 Let $N = \{1, 2, 3\}$, $A^* = \{a, b\}$ with $\ell(a) = 1$, $u(a) = 2$ and $\ell(b) = 2 = u(b)$, with the following preference profile:

$$\begin{aligned} \succsim_1: & \mathbf{a} \succ_1 b \succ_1 a_\emptyset \\ \succsim_2: & a \succ_2 \mathbf{b} \succ_2 a_\emptyset \\ \succsim_3: & \mathbf{b} \succ_3 a \succ_3 a_\emptyset \end{aligned}$$

Assignment π with $\pi(1) = a$ and $\pi^b = \{2, 3\}$ is individually stable and individually rational but not virtually individually stable.

Proofs of Section 3

Proofs of Section 3.1

Theorem 2. A strictly core stable assignment always exists and can be found in polynomial time.

Proof: The basic idea behind algorithm 1 is as follows. Starting with a feasible assignment π , for each agent i and each activity b which i prefers to $\pi(i)$ we check whether there is a subset of agents including agent i that want to deviate to b such that the resulting assignment is feasible. That is, we check whether there is a subset $E \supset \pi^b$ such that (i) for all $j \in E$ we have that $b \succ_j \pi(j)$ holds (recall that for agent i $b \succ_i \pi(i)$ holds) and (ii)

π' with $\pi'(i) = b$ for $i \in E$ and $\pi'(j) = \pi(j)$ for $j \in N \setminus E$ is a feasible assignment. In order to do so, for each activity $c \in A \setminus \{b\}$, we compute the possible numbers of agents in the set π^c that agree with joining b and can be removed from π^c while still enabling a feasible assignment—these numbers are stored in the set R^c . Finally, given these numbers, we need to verify if—including i and the agents in π^b —these add up to an integer contained in $[\ell(b), u(b)]$ by taking exactly one number from each activity (note that 0 must be removed from R^a since we need to include agent i ; also, note that for activity b we need to include the whole amount $|\pi^b|$ of agents assigned to b under π). The latter problem reduces to the MULTIPLE-CHOICE SUBSET-SUM problem (see [20]), which, in our case, allows for an overall polynomial time algorithm for finding a strictly core stable assignment.

Algorithm 1 Algorithm for finding a strictly core stable assignment in an instance (N, A, P, R) of s-GASP.

```

1: Let  $\pi$  be a maximum individually rational assignment.
2:  $R^{a'} := \emptyset$  for all  $a' \in A$ ,  $N' := \emptyset$ ,  $B := \emptyset$ ,  $i := 0$ ,  $\pi'(j) = a_\emptyset$  for all  $j \in N$ 
3: while  $N \setminus N' \neq \emptyset$  do
4:    $i := \min N \setminus N'$ 
5:    $a := \pi(i)$ 
6:    $D := \{b \in A : b \succ_i a\}$ 
7:   while  $D \neq \emptyset$  do
8:     take  $b \in D$ 
9:      $B := \{j \in N : b \succ_j \pi(j)\}$ 
10:    for  $c \in A \setminus \{b\}$  do
11:       $R^c := \{0\}$ 
12:      for  $1 \leq h \leq |\pi^c \cap B|$  do
13:        if  $|\pi^c| - h \in [\ell(c), u(c)]$  then
14:           $R^c := R^c \cup \{h\}$ 
15:        end if
16:      end for
17:    end for
18:     $R^a := R^a \setminus \{0\}$ 
19:    if  $R^a \neq \emptyset$  then
20:      if  $\exists S$  with  $(|\pi^b| + \sum_{j \in S} j) \in [\ell(b), u(b)]$  such that (i)  $|S| = |A| - 1$  and
      (ii) for all  $a' \in A \setminus \{b\}$  we have  $|S \cap R^{a'}| = 1$  then
21:        take such a set  $S$ 
22:        for  $a' \in A \setminus \{b\}$ , let  $h_{a'}$  denote the unique element in  $S \cap R_{a'}$ 
23:         $\pi'(i) := b$ 
24:        set  $\pi'(j) := b$  for  $(h_a - 1)$  arbitrarily chosen  $j \in (\pi^a \cap B) \setminus \{i\}$ 
25:        for  $a' \in A \setminus \{a, b\}$  do
26:          set  $\pi'(j) := b$  for  $h_{a'}$  arbitrarily chosen  $j \in \pi^{a'} \cap B$ 
27:        end for
28:        for each of the remaining agents  $g$  set  $\pi'(g) := \pi(g)$ ;
29:         $\pi := \pi'$ .
30:      end if
31:    end if
32:     $D := D \setminus \{b\}$ 
33:  end while
34:   $N' := N' \cup \{i\}$ 
35: end while

```

As far as the running time of algorithm 1 is concerned, its bottleneck is to decide whether we can add up the above-mentioned numbers to be in the interval $[\ell(b), u(b)]$. In the MULTIPLE-CHOICE SUBSET-SUM problem, we ask if taking exactly one number of each

member of a given family of subsets of non-negative integers adds up to a given number. Applying for instance Pisinger's algorithm [20] for that problem³ requires a running time of $\mathcal{O}(m^2)$ per execution. Clearly, for each interval, we need to execute the algorithm at most $(m + 1)$ times. Thus, the overall running time of our algorithm can roughly be bounded by $\mathcal{O}(nm^4)$, because in the worst case we solve an instance of the MULTIPLE-CHOICE SUBSET-SUM problem at most once for each agent and activity, i.e., nm times. ■

Example 26 Let $N = \{1, 2, 3\}$ and $A^* = \{a, b, c\}$, with $a \succ_1 b \succ_1 c \succ a_0$, $b \succ_2 c \succ_2 a \succ a_0$, and $c \succ_3 a \succ_3 b \succ a_0$. The restrictions on the activities are given by $|\pi^x| \in \{0\} \cup [2, 3]$, for each $x \in A^*$. By the restrictions given, there is at most one non-void activity to which agents can be assigned. Clearly, for any activity $z \in A$ there is a $y \in A^*$ such that two agents prefer y to z . As a consequence, there can be no virtually core stable assignment.

Theorem 4 It is NP-complete to decide if there is a virtually strictly core stable assignment, even when for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.

Proof: Membership in NP is not difficult to verify. The proof proceeds by a reduction from EXACT COVER BY 3-SETS (X3C). The input of an instance of X3C consists of a pair $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$, where $X = \{1, \dots, 3q\}$ and $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_p\}$ is a collection of 3-element subsets of X ; the question is whether we can cover X with exactly q sets of \mathcal{Z} . X3C is known to be NP-complete even when each element of X is contained in exactly three sets of \mathcal{Z} (see [10, 11]); note that in such a case $p = 3q$ holds. For each $i \in X$, let the sets containing i be denoted by $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}$ with $i_1 < i_2 < i_3$.

Define instance $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ of s-GASP as follows. Let $N = \{V_{i,1}, V_{i,2}, V_{i,3} \mid 1 \leq i \leq p\}$ and $A^* = \{y_i, a_i, b_i, c_i \mid 1 \leq i \leq p\}$. For $1 \leq i \leq p$, let $\ell(a_i) = \ell(b_i) = \ell(c_i) = 2$, and $\ell(y_i) = 9$. For each $a \in A^*$, let $u(a) = |N|$. Since any virtually strictly core stable assignment is individually rational, in the profile P we omit the activities ranked below a_0 ; for each $i \in \{1, \dots, p\}$, let the ranking of the agents $V_{i,1}, V_{i,2}, V_{i,3}$ (each of which represents element $i \in X$) be given as follows:

$$\begin{aligned} V_{i,1} : & y_{i_1} \succ_{i,1} y_{i_2} \succ_{i,1} y_{i_3} \succ_{i,1} a_i \succ_{i,1} b_i \succ_{i,1} c_i \succ_{i,1} a_0 \\ V_{i,2} : & y_{i_2} \succ_{i,2} y_{i_3} \succ_{i,2} y_{i_1} \succ_{i,2} b_i \succ_{i,2} c_i \succ_{i,2} a_i \succ_{i,2} a_0 \\ V_{i,3} : & y_{i_3} \succ_{i,3} y_{i_1} \succ_{i,3} y_{i_2} \succ_{i,3} c_i \succ_{i,3} a_i \succ_{i,3} b_i \succ_{i,3} a_0 \end{aligned}$$

Note that each set Z contains three elements, and hence each y_i , $1 \leq i \leq p$, is preferred to a_0 by exactly 9 agents. We show that there is an exact cover in instance $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ if and only if there is a virtually strictly core stable assignment in instance \mathcal{I} .

Assume there is an exact cover C . Consider the assignment π defined by $\pi(V_{i,h}) = y_j$ if $i \in Z_j$ and $Z_j \in C$, for $i \in \{1, \dots, p\}$ and $h \in \{1, 2, 3\}$. Since C is an exact cover, assignment π is well-defined and feasible; note that each agent is assigned to an activity she ranks first, second or third. In addition, note that for $Z_j \in C$, each agent that prefers y_j to a_0 is assigned to y_j . Assume a set of agents E wishes to deviate to another activity d , such that at least one member $i \in E$ prefers d over $\pi(i)$ while there is no $j \in E$ with $\pi(j) \succ_j d$. By the definition of π , $d \in \{y_i \mid 1 \leq i \leq p\}$ holds. Observe that $\pi^d = \emptyset$ holds because C is an exact cover. Due to $\ell(d) = 9$, it hence follows that each agent of those who prefer d to a_0 must prefer d to the assigned activity, which is impossible since, by construction of the instance, for at least one of these agents j the assigned activity is top-ranked, i.e., $\pi(j) \succ_j d$ holds. Therewith, π is virtually strictly core stable.

Conversely, assume there is a virtually strictly core stable assignment π . Assume that there is an agent $V_{i,h}$ who is not assigned to one of the activities $y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}$. Then, by

³In Pisinger's work [20], the algorithm is formulated for positive weights only but extends to non-negative integers.

$\ell(y_i) = 9$ and the fact that exactly 9 agents prefer y_i to a_\emptyset for each $i \in \{1, \dots, p\}$, it follows that no agent is assigned to one of $y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}$; in particular none of $V_{i,1}, V_{i,2}, V_{i,3}$ is assigned to one of these activities. Analogously to Example 26 it then follows that there is no virtually strictly core stable assignment, in contradiction with our assumption.

Thus, π assigns each agent $V_{i,h}$ to one of the activities $y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}$. For each $i \in \{1, \dots, p\}$, by $\ell(y_i) = 9$ and the fact that exactly 9 agents prefer y_i to a_\emptyset it follows that to exactly one of $y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}$ exactly 9 agents are assigned, while no agent is assigned to the remaining two activities. As a consequence, the set $C = \{Z_i \mid |\pi^{y_i}| = 9, 1 \leq i \leq p\}$ is an exact cover in instance $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$. ■

Proofs of Section 3.2

Proposition 6 In polynomial time we can find a feasible assignment that maximizes the number of agents assigned to a non-void activity.

Proof: We need to find the maximum number k such that taking, for each $a \in A^*$, exactly one number of $\{0\} \cup [\ell(a), u(a)]$ adds up to k . This problem corresponds to the MULTIPLE-CHOICE SUBSET-SUM problem (see [20]); in our case, the latter allows for an overall polynomial time algorithm since $u(a)$ is bounded by n . ■

Theorem 7. It is NP-complete to decide if there is an individually rational assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$, even if for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.

Proof: The proof proceeds by a reduction from EXACT COVER BY 3-SETS (X3C). The input of an instance of X3C consists of a pair $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$, where $X = \{1, \dots, 3q\}$, and $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_p\}$ is a collection of 3-element subsets of X ; the question is whether we can cover X with exactly q sets of \mathcal{Z} . X3C is known to be NP-complete even when each element of X is contained in exactly three sets of \mathcal{Z} (see [10, 11]); note that in such a case $p = 3q$ holds. For each $i \in X$ let the sets containing i be denoted by $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}$ with $i_1 < i_2 < i_3$.

Given such an instance $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ of X3C, we construct an instance $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ of s-GASP as follows. Set $N := X$, $A := \{a_1, \dots, a_p\}$ and let P be an arbitrary profile such that for each $i \in N$ the ranking restricted to the four top-ranked activities is given by $a_{i_1} \succ_i a_{i_2} \succ_i a_{i_3} \succ_i a_\emptyset$. The restrictions are given by $|\pi^a| \in \{0\} \cup [3, n]$, for all $a \in A^*$.

If there is an exact cover C , consider the assignment π given by $\pi(i) = a_j$, with $i \in Z_j$ and $Z_j \in C$, for $i \in N$. Clearly, since C is an exact cover, π is well-defined since for any $i \in X$, $i \in Z_j$ holds for exactly one set $Z_j \in C$. In addition, it is not hard to verify that π is feasible (since each Z_j contains exactly three elements and hence either no agent or exactly three agents are assigned to a_j), individually rational, and assigns each agent to a non-void activity.

On the other hand, if an assignment π satisfies these properties, then to any non-void activity either zero or exactly three agents are assigned (recall that in the original X3C-instance, each set contains exactly three elements). I.e., for exactly q activities $a \in A^*$ we have $|\pi^a| > 0$. Since all agents are assigned to a non-void activity, with individual rationality we get that $D = \{Z_j \mid |\pi^{a_j}| > 0, 1 \leq j \leq p\}$ is an exact cover for X . ■

Theorem 11. Let $1 \leq \ell(a) \leq u(a) \leq 2$ for each activity $a \in A^*$. Then, we can decide in polynomial time if there is an individually rational assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$.

Proof: Let $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ be such an instance of s-GASP. We adapt the previous proof by constructing a graph $G = (V, E)$ as follows: Let $V_N := \{v_i \mid i \in N\} \subseteq V$ and $V_A := \{v_a \mid a \in A^*\} \subseteq V$. For each pair $(v_i, v_a) \in V_N \times V_A$ we create the edge $\{v_i, v_a\} \in E$

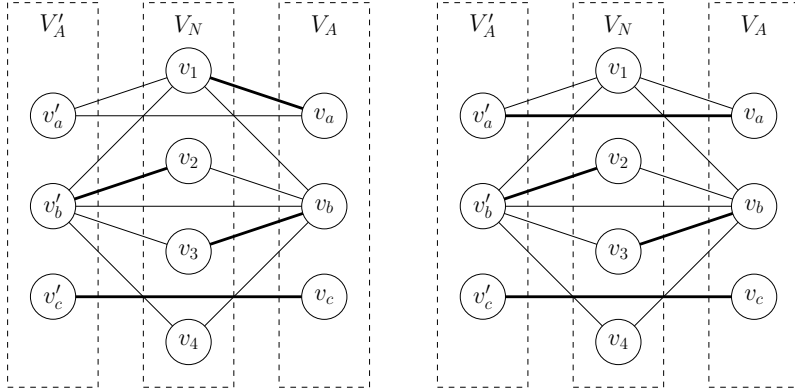


Figure 2: Reducing an instance \mathcal{I} of **s-GASP** with $\ell(a) = u(a) = 2$ for each activity $a \in A^*$ to **MAXIMUM MATCHING** (see Theorem 9). In this example, the set of agents is $N := \{1, 2, 3, 4\}$, the set of non-void activities is $A^* = \{a, b, c\}$ and the relevant preferences are $\{a, b\} \succsim_1 a_\emptyset$, $\{b\} \succsim_2 a_\emptyset$, $\{b\} \succsim_3 a_\emptyset$ and $\{b\} \succsim_4 a_\emptyset$. A maximum matching is indicated by bold edges. The normalized version (as described in Theorem 9) of the maximum matching on the left is depicted on the right. The matching on the right corresponds to a maximum individually rational assignment for \mathcal{I} (i.e., $\pi(1) = \pi(4) = a_\emptyset$ and $\pi(2) = \pi(3) = b$).

if and only if $a \succsim_i a_\emptyset$. Let $A_{\leq 2} \subseteq A^*$ be the non-void activities with upper bound 2 and let $A_2 \subseteq A_{\leq 2}$ be the non-void activities with lower and upper bound 2. Then, we create the vertex set $V'_{A_{\leq 2}} := \{v'_a \mid a \in A_{\leq 2}\} \subseteq V$. For each activity $a \in A_{\leq 2}$ and each agent $i \in N$, we create the edge $\{v_i, v'_a\} \in E$ if and only if $a \succsim_i a_\emptyset$. Additionally, we create the edges $\{v_a, v'_a\} \in E$ for each activity $a \in A_2$. ■

Theorem 14. It is **NP-complete** to decide if there is a virtually individually stable assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$, even if for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.

Proof: The proof follows analogously to the proof of Theorem 7. ■

Theorem 15. It is **NP-complete** to decide if there is a strictly core stable assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$, even if for each activity $a \in A^*$ we have $u(a) = n$.

Proof: For membership in **NP**, assume an assignment π to be given. It is sufficient to determine, for each agent i and activity $a \succ_i \pi(i)$, whether there is a subset $E \supseteq (\pi(a) \cup \{i\})$ such that for each $e \in E$ it holds that $a \succ_e \pi(e)$, such that the assignment resulting from the deviation is still feasible. Scanning, in the worst case, the whole profile for each agent and activity, and checking the feasibility constraints, can be done in polynomial time.

For **NP-hardness**, we again reduce from **EXACT COVER BY 3-SETS (X3C)**. Given an instance $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ of **X3C**, where $X = \{1, \dots, 3q\}$ and $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_p\}$ is a collection of 3-element subsets of X , we ask whether X can be covered by q sets of \mathcal{Z} . Again, we assume that each element of X is contained in exactly three sets of \mathcal{Z} (see [10, 11]) (this implies $p = 3q$ holds). For each $i \in X$ let $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}$ denote the sets containing i . Given $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ we construct instance $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ of **s-GASP** as follows. Set $N := X$, $A := \{a_1, \dots, a_p\}$ and let P be an arbitrary profile such that for each $i \in N$ the ranking restricted to the four top-ranked activities is given by $a_{i_1} \sim_i a_{i_2} \sim_i a_{i_3} \succ_i a_\emptyset$. The restrictions are given by $|\pi^a| \in \{0\} \cup [3, n]$, for all $a \in A^*$.

Assume there is an exact cover C . Let the assignment π be given by $\pi(i) = a_j$, with $i \in Z_j$ and $Z_j \in C$, for $i \in N$. Because C is an exact cover, π is well-defined and feasible

(each set Z_j contains exactly three elements of X , therefore either exactly three agents or no agent at all is assigned to activity a_j). Also, π assigns each agent to one of the three activities she has top-ranked. As a consequence, π is strictly core stable because no agent i can prefer any activity over $\pi(i)$.

On the other hand, assume there is a strictly core stable assignment π which assigns each agent to a non-void activity. By the restrictions, to any non-void activity either zero or exactly three agents are assigned. That means, for exactly q activities $a \in A^*$ we have $|\pi^a| > 0$. Assume an agent i is assigned to an activity a with $a_\emptyset \succ_i a$. Then, since each set of Z contains exactly three elements, the group E of agents with $E := \{i \in N \mid a_{i_1} \succ a_\emptyset\} \cup \pi^{a_{i_1}}$ is of size at least 3, and each $e \in E$ has $a \succ_e \pi(e)$ with $i \in E$ strictly preferring a_{i_1} over $\pi(i)$. This, however, contradicts with strict core stability of π . Hence, each agent is assigned to one of her top-ranked activities; as a consequence, $D = \{Z_j \mid |\pi^{a_j}| > 0, 1 \leq j \leq p\}$ is an exact cover for X . ■

Theorem 16. It is NP-complete to decide if there is an envy-free assignment that assigns each agent to some $a \in A^*$.

Proof: Reduction from X3C. Let $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ be an instance of X3C with $X = \{1, \dots, 3q\}$ and $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_p\}$, where each element of X is contained in exactly three sets of \mathcal{Z} . Again, let the sets containing i be denoted by $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}$ with $i_1 < i_2 < i_3$, for each $i \in X$. Construct instance $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ of s-GASP as follows. Let $N := \{1, \dots, 6q\}$ and $A^* := \{a_1, \dots, a_p\} \cup \{b_1, \dots, b_{3q}\}$. Let σ be a fixed strict ranking on $A' := \{a_1, \dots, a_p\}$. Finally, let P be a profile such that (i) for each $i \in X$ the ranking restricted to the $(2+p)$ top-ranked activities is given by $a_{i_1} \succ_i a_{i_2} \succ_i a_{i_3} \succ_i b_i \succ_i a_\emptyset \succ_i \sigma_i$, where σ_i corresponds to the ranking σ restricted to the set $A' \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\}$; and (ii) for $1 \leq i \leq 3q$ the ranking of agent $(3q+i)$ restricted to the $(2+p)$ top-ranked activities is $b_i \succ_{(3q+i)} a_\emptyset \succ_{(3q+i)} \sigma$. The restrictions in R are given by $|\pi^a| \in \{0\} \cup [3, 3]$, for $a = a_j \in A^*$ with $j \in \{1, \dots, p\}$, and $|\pi^b| \in \{0\} \cup [1, 1]$, for $b = b_j \in A^*$, $j \in \{1, \dots, 3q\}$.

Given an exact cover C , consider the assignment π defined by (i) for $i \in N \setminus X$: $\pi(i) = b_i$ and (ii) for $i \in X$: $\pi(i) = a_j$ iff $i \in Z_j$ with $Z_j \in C$. It is easy to see that π is feasible and assigns each agent to a non-void activity. Obviously, none of the agents $i \in N \setminus X$ envies another agent because each of these agents is assigned to her top-ranked activity. On the other hand, each agent $i \in X$ is assigned to one of her three top-ranked activities. By the fact that C is an exact cover, it follows that from the three top-ranked activities of agent i , only $\pi(i)$ is used, i.e., a positive number of agents is assigned. Thus, also $i \in X$ does not envy another agent.

On the other hand, let assignment π satisfy the stated properties. In particular, each agent is assigned to a non-void activity. Clearly, no agent $i \in X$ can be assigned to some b_j because otherwise agent $3q+j$ would envy i . I.e.,

$$\pi(i) \in A' \text{ for all } i \in X \tag{1}$$

holds. Let $N' = \{g \in N \setminus X \mid \pi(g) \in \{a_1, \dots, a_p\}\}$.

If $N' = \emptyset$, then $\pi(3q+i) = b_i$ follows for each $i \in \{1, \dots, 3q\}$. Thus, in order to avoid envy, each agent $i \in X$ must be assigned to one of her three top-ranked activities. For any activity $a \in A'$ with $\pi^a \neq \emptyset$ the restrictions imply that exactly three agents are assigned to a . Hence, it is not difficult to verify that $D = \{Z_j \in \mathcal{Z} : |\pi^{a_j}| > 0, 1 \leq j \leq p\}$ forms an exact cover for X in instance $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$.

Let $N' \neq \emptyset$. If N' contains two agents g, h such that $\pi(g) \neq \pi(h)$, then one of these agents must envy the other by the fact that the two agents' rankings over $\{a_1, \dots, a_p\}$ coincide. Hence, all members of N' must be assigned to the same activity $a \in \{a_1, \dots, a_p\}$. Let $X' = \{i \in X : \pi(i) \notin \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\}\}$.

Assume $X' \neq \emptyset$, i.e., there is an agent $i \in X$ which is not assigned to one of her three

top-ranked activities.

First, we show that $\pi(i) = a$ must hold for each $i \in X'$. Assume the opposite, i.e., $\pi(i) \neq a$ for some $i \in X'$. Recall that $\pi(i) \in A'$ holds (see (1)), and thus $\pi(i) \in A' \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\}$ follows. Then, in the strict ranking σ we must have $a \succ_\sigma \pi(i)$ because otherwise the members in N' envy i . However, this implies that in \succ_i we must have $a \succ_i \pi(i)$ due to $\pi(i) \in A' \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\}$; i.e., i envies the members in N' . Therewith, $\pi(i) = a$ follows.

From $\pi^a \neq \emptyset$ (due to $N' \neq \emptyset$) and the given restrictions we can conclude that exactly three agents are assigned to a . With $|N'| \neq 0$ it follows that $|X'| \in \{1, 2\}$ holds. Recall that each agent of $X \setminus X'$ is assigned to one of her three top-ranked activities. In addition, note that by the given restrictions to each active $a' \in A' \setminus \{a\}$ exactly three agents must be assigned, all of which must be members of $X \setminus X'$ (recall that (i) all members of X' are assigned to a and (ii) all members of $N \setminus X$ are either assigned to a or to some $b \in \{b_1, \dots, b_{3q}\}$). This, however, is impossible, since from $|X| = 3q$ and $|X'| \in \{1, 2\}$ with $X' \subset X$ it follows that $|X \setminus X'| \in \{3q - 1, 3q - 2\}$ holds.

Thus, $X' = \emptyset$ holds. Assume $\pi(i) = a$ for some $i \in X$. By $N' \neq \emptyset$ we know that there can be at most two such agents and we get a contradiction to the size of X analogously to above. Hence, $\pi(i) \neq a$ holds for all $i \in X$. As a consequence, for each agent $i \in X$ we have $\pi(i) \in \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\}$ such that to $\pi(i)$ exactly three agents, all members of X , are assigned (again, recall that for $j \in N \setminus X$ it holds that $\pi(j) \in \{a, b_1, \dots, b_{3q}\}$). In other words, the collection $D = \{Z_j \in \mathcal{Z} : |\pi^{a_j} \cap X| > 0, 1 \leq j \leq p\}$ is an exact cover for X . ■

Proposition 27 *If all agents have strict linear orders on the set of activities and $\ell(a) = 1$ for all $a \in A^*$, then it can be decided in polynomial time if there exists an envy-free assignment which assigns all agents to a non-void activity.*

Proof: A simple greedy algorithm can determine if there exists such an envy-free assignment. The first step is to assign each agent to her most preferred non-void activity; this is possible because of $\ell(a) = 1$ for all $a \in A^*$. If the resulting (provisional) assignment π_p is feasible, i.e., for all activities $a \in A^*$ the statement $u(a) \geq |\pi_p^a|$ holds true, we are done. If this is not the case, we remove all activities a with $u(a) > |\pi_p^a|$ from the set of activities (envy-freeness will only be accomplished if no agent is assigned to any of these activities) and start over with the first step. This algorithm either stops because all activities have been removed, or it produces an envy-free assignments which assign all agents to a non-void activity. ■

Proofs of Section 3.3

Theorem 17. It is NP-hard to find a Pareto optimal assignment in an instance of s-GASP, even when $u(a) = n$ for each $a \in A^*$.

Proof: Again we reduce from EXACT COVER BY 3-SETS (X3C). An instance $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ of X3C consists of a set $X = \{1, \dots, 3q\}$ and a collection $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_p\}$ of 3-element subsets of X ; we ask whether X can be covered by q sets of \mathcal{Z} . We can assume that each element of X is contained in exactly three sets of \mathcal{Z} (see [10, 11]) (this implies $p = 3q$ holds). For $i \in X$ let again $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}$ denote the three sets containing element i . Given $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ we construct instance $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ of s-GASP as follows. Let $N = X$, $A = \{a_1, \dots, a_p\}$; let P be some profile such that for each $i \in N$, (i) the ranking restricted to the four top-ranked activities corresponds to $a_{i_1} \sim_i a_{i_2} \sim_i a_{i_3} \succ_i a_\emptyset$, and (ii) for every remaining activity c we have $a_\emptyset \succ_i c$. With $n = |N|$, the restrictions are given by $|\pi^a| \in \{0\} \cup [3, n]$ for all $a \in A^*$.

Consider instance \mathcal{I} of s-GASP. Let π be a Pareto optimal assignment. If π assigns an agent $i \in N$ to an alternative c with $a_\emptyset \succsim_i c$, then by Pareto optimality of π it follows that there does not exist a Pareto optimal assignment μ with $\mu(i) \succ_i a_\emptyset$ for each agent i . I.e., either each Pareto optimal assignment or no Pareto optimal assignment assigns at least one agent i to an activity different from $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$. We complete the proof by showing that a Pareto optimal assignment μ with $\mu(i) \succ_i a_\emptyset$ for each $i \in N$ exists if and only if there is an exact cover in instance $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ of X3C.

If there is a Pareto optimal assignment for $\mu(i) \succ_i a_\emptyset$ for each $i \in N$, each agent $i \in N$ is assigned to a non-void activity. By $\ell(a) = 3$ for $a \in A^*$ and since each a_j is preferred over a_\emptyset by exactly three agents, it follows that the collection $D = \{Z_j \mid |\pi^{a_j}| = 3, 1 \leq j \leq p\}$ is an exact cover for X . On the other hand, given an exact cover C for instance $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$, the assignment π which assigns $i \in N$ to activity a_j for the unique set Z_j of C which contains element i is feasible and assigns each agent to one of her top-ranked activities. As a consequence, π is Pareto optimal. ■

Theorem 18. If for each activity $a \in A^*$ we have $\ell(a) = 1$, then in polynomial time we can find a Pareto optimal assignment that maximizes the number of agents assigned to a non-void activity.

Proof: In that case, any Pareto optimal assignment is individually rational. Let k be the maximum number of agents assigned to non-void activities by an individually rational assignment. Hence, it is sufficient to find a Pareto optimal assignment π with $\#(\pi) = k$. Given an instance $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ of s-GASP with $\ell(a) = 1$ for all $a \in A^*$, we construct an instance \mathcal{F} of the minimum cost flow problem. Instance \mathcal{F} corresponds to instance \mathcal{M} of the proof of Theorem 8 except that we add the following edge costs: for each $a \in A^*$ and $i \in N$ edge (i, a) has cost $-(1 + |\{b \in A^* \mid a \succ_i b, b \succ_i a_\emptyset\}|)$, all remaining edges have zero cost. Let f be a minimum integer cost flow of size k in instance \mathcal{F} . Then f induces the assignment π by setting $\pi(i) = a$ iff f sends a unit of flow through edge (i, a) . Clearly, π is Pareto optimal since otherwise a flow f' of lower total cost than the total cost of f could be induced. ■

Theorem 20. It is NP-hard to decide if there is a Pareto optimal assignment that assigns each agent to a non-void activity.

Proof: We provide a reduction from EXACT COVER BY 3-SETS (X3C). Let $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ be an instance of X3C consisting of a set $X = \{1, \dots, 3q\}$ and a collection $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_p\}$ of 3-element subsets of X . Again, we assume that each element of X is contained in exactly three sets of \mathcal{Z} (see [10, 11]) (this implies $p = 3q$ holds). For $i \in X$ let again $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}$ denote the three sets containing element i .

Given $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ we construct instance $\mathcal{I} = (N, A, P, R)$ of s-GASP as follows. Let $N = X$, $A = \{a_1, \dots, a_p\} \cup \{b\}$; let P be some profile such that for each $i \in N$, (i) the ranking restricted to the five top-ranked activities corresponds to $b \sim_i a_{i_1} \sim_i a_{i_2} \sim_i a_{i_3} \succ_i a_\emptyset$, and (ii) for every remaining activity c we have $a_\emptyset \succ_i c$. With $n = |N|$, the restrictions are given by $|\pi^b| \in \{0\} \cup [n-1, n-1]$, and $|\pi^a| \in \{0\} \cup [3, 3]$ for all $a \in A^* \setminus \{b\}$.

Consider instance \mathcal{I} of s-GASP. Observe that an assignment π which assigns an agent $i \in N$ to an alternative c with $a_\emptyset \succ_i c$ cannot be Pareto optimal, since under π' – which assigns i to a_\emptyset and each of the remaining agents to b – agent i is strictly better off while no agent is worse off. Also, any assignment π that assigns at most $n-2$ agents to a non-void activity is not Pareto optimal: Under λ – which assigns all of these agents and all but one of the agents of π^{a_\emptyset} to b and the remaining agent to a_\emptyset , makes at least one agent better off (an agent of π^{a_\emptyset} who is assigned to b under λ) while no agent is worse off.

Therefore, a Pareto optimal assignment must be individually rational and assigns at least $n-1$ agents to non-void activities. Note that any assignment that assigns exactly $n-1$ agents to non-void activities must assign all of these agents to b , because n is a multiple of

3 and due to $\ell(a) = u(a) = 3$ for $a \in A^* \setminus \{b\}$. We complete the proof by showing that there is a Pareto optimal assignment μ with $\#(\mu) = n$ if and only if there is an exact cover in instance $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$ of X3C.

If there is a Pareto optimal assignment for μ with $\#(\mu) = n$, each agent $i \in N$ is assigned to a non-void activity. By the above observation, μ is individually rational. Clearly, by the bounds $\ell(a) = u(a) = 3$ for $a \in A^* \setminus \{b\}$ no agent can be assigned to b ; also, it follows that the collection $D = \{Z_j \mid |\pi^{a_j}| = 3, 1 \leq j \leq p\}$ is an exact cover for X . On the other hand, given an exact cover C for instance $\langle X, \mathcal{Z} \rangle$, the assignment π which assigns $i \in N$ to activity a_j for the unique set Z_j of C which contains element i is feasible and assigns each agent to one of her top-ranked activities. Thus, π is Pareto optimal. ■

Proofs of Section 4

Proposition 22. For any $k \geq 6$, there is an instance (N, A, P, R) of s-GASP with $|N| = k$ and $u(a) = k$ for each $a \in A^*$, for which there does not exist an assignment π which is both Pareto optimal and envy-free.

Proof: We provide the proof for $k = 6$, which easily extends to $k = n$ for any $n > 6$. Consider the instance of s-GASP with $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A^* = \{a, b, c\}$ and for any $x \in A^*$ we have $\ell(x) = 3, u(x) = 6$. The rankings are

$$\begin{array}{ll} \succsim_1: & a \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 a_0 & \succsim_4: & a \succ_4 b \succ_4 c \succ_4 a_0 \\ \succsim_2: & b \succ_2 c \succ_2 a \succ_2 a_0 & \succsim_5: & b \succ_5 c \succ_5 a \succ_5 a_0 \\ \succsim_3: & c \succ_3 a \succ_3 b \succ_3 a_0 & \succsim_6: & c \succ_6 a \succ_6 b \succ_6 a_0 \end{array} .$$

Due to the feasibility constraints, there are only 4 types of feasible assignments:

- (i) 3-5 agents are assigned to the same activity $x \neq a_0$, and the rest to a_0 ;
- (ii) all agents are assigned to the void activity;
- (iii) all agents are assigned to the same activity $x \neq a_0$;
- (iv) 3 agents are assigned to the same activity $x \neq a_0$ and the other 3 agents are assigned to another activity $y \notin \{x, a_0\}$.

The assignments of type (i) and (ii) are Pareto dominated by some assignment of type (iii). An assignment π_1 of type (iii) is envy-free but not Pareto optimal. Due to the symmetrical construction of the preferences profiles, we can assume without loss of generality $\pi_1^a = N$. But then the assignment is Pareto dominated by the assignment π_2 with $\pi_2^a = \{1, 3, 4\}$ and $\pi_2^c = \{2, 5, 6\}$. An assignment of type (iv) cannot be envy-free. Without loss of generality we can assume $x = a$ and $y = b$. Assume, for the sake of contradiction, that there is an envy-free assignment. Agents 1 and 4 must be assigned to activity a and agents 2 and 5 to activity b . As the preference profiles of the remaining agents both rank a strictly better than b , the assignment cannot be an envy-free assignment. ■

B.4. Tool Auctions

Tool Auctions

Janosch Döcker
University of Tübingen
Germany

Britta Dorn
University of Tübingen
Germany

Ulle Endriss
ILLC, University of Amsterdam
The Netherlands

Ronald de Haan
ILLC, University of Amsterdam
The Netherlands

Sebastian Schneckenburger
University of Tübingen
Germany

Abstract

We introduce *tool auctions*, a novel market mechanism for constructing a cost-efficient assembly line for producing a desired set of products from a given set of goods and tools. Such tools can be used to transform one type of good into a different one. We then study the computational complexity of tool auctions in detail, using methods from both classical and parameterized complexity theory. While solving such auctions is intractable in general, just as for the related frameworks of combinatorial and mixed auctions, we are able to identify several special cases of practical interest where designing efficient algorithms is possible.

1 Introduction

“It looked to Sacharissa that the only tools a dwarf needed were his axe and some means of making fire. That’d eventually get him a forge, and with that he could make simple tools, and with those he could make complex tools, and with complex tools a dwarf could more or less make anything.”

—Terry Pratchett, *The tRuth*

Auctions, and combinatorial auctions in particular, are a powerful family of market mechanisms for allocating resources, which have been studied in depth in Economics, Operations Research, and AI (Cramton, Shoham, and Steinberg 2006). We propose a novel type of combinatorial auction that allows the auctioneer to purchase a number of *tools* as well as other *goods*. She can then use these tools to produce further such tools and goods. Her objective is to pick a set of tools and then to execute a suitable sequence of actions, each consisting of an application of one of the tools she has access to, so as to eventually obtain the set of goods she desires. A secondary objective is to find a sequence that is as short as possible.

Our model may be interpreted as a restricted—and thus computationally less demanding—instance of the model of *mixed multi-unit combinatorial auctions* of Cerquides et al. (2007), which has applications in the domain of industrial supply-chain management. In a mixed auction, the auctioneer can purchase *transformations*, from *input goods* to *output goods*, to compose a sequence of such transformations to obtain the goods she desires. Our *tool auctions* are mixed auctions in which, for each transformation, there is only a

single good that occurs both in the input set and the output set: the tool. For example, in the context of the transformation mapping $\{mixer, melon\}$ to $\{mixer, juice\}$, the *mixer* is the tool, while *melon* and *juice* are ordinary goods. In addition to limiting each transformation to just one tool, to control the complexity of the problem faced by the auctioneer, we also put certain restrictions on the number of non-tool goods involved in a single transformation.

Fully expressive mixed auctions are highly complex. The *winner determination problem*, i.e., the problem of finding a sequence that produces the desired set of goods at a given price, is NP-complete (Cerquides et al. 2007). Fionda and Greco (2013) have analysed this problem, as well as the related *feasibility problem*, where we ignore prices and simply want to find *some* sequence that does the job, in great detail. They were able to identify a number of so-called *tractability islands*, i.e., restrictions of the general setting where solving an auction is possible in polynomial time. For example, they were able to show that, when every transformation only admits a single input good and a single output good, then the feasibility problem is polynomial. But even permitting two output goods (and still just one input good) already turns the problem NP-complete. In general, existing tractability results only apply under very severe restrictions. The fundamental intuition inspiring our new auction model is that introducing constraints on the types of goods—tools *vs.* ordinary goods—whilst at the same time relaxing constraints on the number of goods involved in a transformation constitutes a promising trade-off between tractability and expressivity.

The core of this paper is devoted to testing this intuition. We provide a detailed complexity analysis of both the feasibility and the winner determination problem for tool auctions. While solving tool auctions, just like most other kinds of combinatorial auctions, is intractable in general, we are able to identify several special cases of practical interest where designing efficient algorithms is possible. In particular, we show that several relevant decision problems are either polynomial-time solvable or fixed-parameter-tractable.

The remainder of the paper is organised as follows. Section 2 defines the model of tool auctions we propose, explains its relationship to the existing model of mixed auctions, and elucidates on some of the design choices made. Section 3 presents our complexity results, while Section 4 discusses related work. Finally, Section 5 concludes with a brief dis-

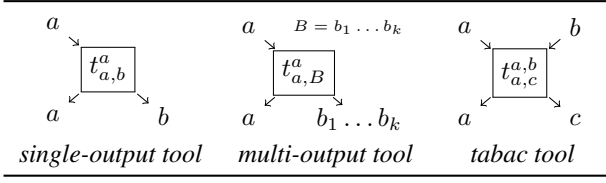


Table 1: Tools

discussion of a number of variants of our model and an outlook on possible directions for future work.

2 The Model

In this section we introduce our model of tool auctions.

2.1 Notation and Terminology

Fix a finite set G of *goods*. A *bundle* is a multiset of goods, i.e., a function $B : G \rightarrow \mathbb{N}$, which we also write as $B \in \mathbb{N}^G$, mapping each good to the multiplicity with which it occurs in the bundle (we use \mathbb{N} to denote the natural numbers, together with 0). We use standard set-theoretic notation also for multisets: $x \in B$ is short for $B(x) > 0$; $B \subseteq B'$ for $\forall x \in G : B(x) \leq B'(x)$; $B \cup B'$ for $x \mapsto \max\{B(x), B'(x)\}$ (i.e., for the function mapping any $x \in G$ to the maximum of $B(x)$ and $B'(x)$); $B \cap B'$ for $x \mapsto \min\{B(x), B'(x)\}$; $B \setminus B'$ for $x \mapsto \max\{0, B(x) - B'(x)\}$; $|B| = k$ for $\sum_{x \in G} B(x) = k$; and $B = \emptyset$ for $|B| = 0$. We also use \uplus to denote multiset addition, i.e., $B \uplus B'$ is short for $x \mapsto [B(x) + B'(x)]$. B is called a *single-unit bundle* if $|B(x)| \leq 1$ for all $x \in G$.

We use triples $t = \langle \tau, \mathcal{I}, \mathcal{O} \rangle \in G \times \mathbb{N}^G \times \mathbb{N}^G$ with $\tau \notin \mathcal{I} \cup \mathcal{O}$ and $\mathcal{I} \cap \mathcal{O} = \emptyset$ to describe available *transformations*, with τ being the *tool* required to use the transformation, \mathcal{I} the *input goods*, and \mathcal{O} the *output goods*. By a slight abuse of terminology, we use the term ‘tool’ not only for τ but also for t . In this paper, we focus on three types of transformations that impose certain constraints on \mathcal{I} and \mathcal{O} : *single-output tools* with $|\mathcal{I}| = \emptyset$ and $|\mathcal{O}| = 1$; *multi-output tools* with $|\mathcal{I}| = \emptyset$; and *tabac tools* with $|\mathcal{I}| = |\mathcal{O}| = 1$. These are visualised in Table 1. In line with this visualisation, we sometimes use $t_{\tau, \mathcal{O}}^{\mathcal{I}}$ as an alternative representation for $\langle \tau, \mathcal{I}, \mathcal{O} \rangle$.

An *auction instance* is a triple $\langle \mathcal{T}, \mathcal{U}_{in}, \mathcal{U}_{out} \rangle$, where \mathcal{T} is the set of transformations available to the auctioneer to choose from, $\mathcal{U}_{in} \in \mathbb{N}^G$ is the bundle she owns initially, and $\mathcal{U}_{out} \in \mathbb{N}^G$ is the bundle she hopes to end up with.

To solve an auction instance, we now consider *sequences* $\Sigma = t^1, t^2, \dots, t^\ell$ of applications of the available transformations in \mathcal{T} . We refer to each such t^i , which is of the form $\langle \tau^i, \mathcal{I}^i, \mathcal{O}^i \rangle$, as an *action* in the sequence. Importantly, two different actions in Σ could be applications of the same transformation (i.e., transformations can be reused). The *length* of Σ is $|\Sigma| = \ell$. We use multisets $\mathcal{M}^i \in \mathbb{N}^G$ to keep track of the goods held by the auctioneer after the i th action in Σ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^0 &:= \mathcal{U}_{in}, \\ \mathcal{M}^i &:= (\mathcal{M}^{i-1} \setminus \mathcal{I}^i) \uplus \mathcal{O}^i \quad \text{for } i \in \{1, \dots, \ell\}. \end{aligned}$$

We call a sequence Σ *legal*, if at any stage of the process the auctioneer does in fact hold all the goods required to perform

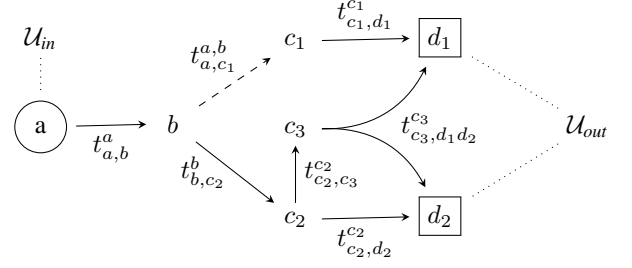


Figure 1: Visualisation of Example 1

the next action, including the relevant tool, i.e., if

$$\mathcal{I}^i \subseteq \mathcal{M}^{i-1} \quad \text{and} \quad \tau^i \in \mathcal{M}^{i-1} \quad \text{for all } i \in \{1, \dots, \ell\}.$$

We say that Σ *achieves* the desired output \mathcal{U}_{out} if $\mathcal{U}_{out} \subseteq \mathcal{M}^\ell$. In this case, we write $\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}_{out}$.

We are now ready to define the two decision problems we are going to analyse (see Table 2). FEASIBILITY asks whether there is a way to achieve the desired outcome. WINNER DETERMINATION (or WINDET for short) asks whether the same is possible using a sequence of at most K actions, for some $K \in \mathbb{N}$. We may think of K as a bound on time available to the auctioneer (if each action takes up one time unit) or as a budget (if each action costs one currency unit).

Example 1. Consider the goods

$$G = \{a, b, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2\}$$

and the auction instance $\langle \mathcal{T}, \{a\}, \{d_1, d_2\} \rangle$, where

$$\mathcal{T} = \{t_{a,b}^a, t_{a,c_1}^a, t_{c_1,d_1}^{c_1}, t_{b,c_2}^b, t_{c_2,d_2}^{c_2}, t_{c_2,c_3}^{c_2}, t_{c_3,d_1 d_2}^{c_3}\}.$$

So the auctioneer initially only holds the good a and wants to end up with the bundle $\{d_1, d_2\}$. Figure 1 visualises this scenario. $\Sigma_1 = t_{a,b}^a, t_{a,c_1}^a, t_{c_1,d_1}^{c_1}$ is the shortest sequence to achieve $\{d_1\}$, and $\Sigma_2 = t_{a,b}^a, t_{b,c_2}^b, t_{c_2,d_2}^{c_2}$ is the shortest one to achieve $\{d_2\}$. By combining the two, we obtain a first legal solution: for $\Sigma = t_{a,b}^a, t_{a,c_1}^a, t_{c_1,d_1}^{c_1}, t_{a,b}^a, t_{b,c_2}^b, t_{c_2,d_2}^{c_2}$, which has length 6, we get $\Sigma \rightsquigarrow \{d_1, d_2\}$. Notably some, but not all, permutations of Σ are also legal solutions; e.g., t_{b,c_2}^b only can be applied as action t^i if $b \in \mathcal{M}^i$. For one permutation of Σ , one application of $t_{a,b}^a$ is unnecessary, which leads to the improved solution $\Sigma' = t_{a,b}^a, t_{b,c_2}^b, t_{c_2,d_2}^{c_2}, t_{a,c_1}^a, t_{c_1,d_1}^{c_1}$ of length 5. But the best solution is $\Sigma^* = t_{a,b}^a, t_{b,c_2}^b, t_{c_2,c_3}^{c_2}, t_{c_3,d_1 d_2}^{c_3}$ of length 4.

2.2 Design Choices

Next, we highlight some of the design choices made in setting up our model and discuss possible alternatives. For all of them, alternative choices are possible and worth investigating.

Free disposal. By only requiring $\mathcal{U}_{out} \subseteq \mathcal{M}^\ell$ rather than $\mathcal{U}_{out} = \mathcal{M}^\ell$, we are making the assumption that the auctioneer can freely dispose of unwanted goods.

Uniform prices. By defining WINDET in terms of $|\Sigma|$, we are making the implicit assumption that every action is

FEASIBILITY	WINNER DETERMINATION (WINDET)
<i>Instance:</i> an auction instance $\langle \mathcal{T}, \mathcal{U}_{in}, \mathcal{U}_{out} \rangle$.	<i>Instance:</i> an auction instance $\langle \mathcal{T}, \mathcal{U}_{in}, \mathcal{U}_{out} \rangle$ and a number $K \in \mathbb{N}$.
<i>Question:</i> is there a legal sequence Σ s.t. $\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}_{out}$?	<i>Question:</i> is there a legal sequence Σ s.t. $ \Sigma \leq K$ and $\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}_{out}$?

Table 2: Decision Problems for Tool Auctions

equally expensive to execute. Alternatively, one could specify a price for each transformation and ask for the sum of the prices of the actions in Σ to not exceed K .¹

Unlimited use of transformations. We assume that every transformation can be used any number of times—although the auctioneer has to ‘pay’ for every single application of it. Alternatively, one could specify for each transformation how often it can be used at most. Going further, one could define a *bidding language* to express constraints on acceptable combinations of actions (Cerquides et al. 2007; Nisan 2006), e.g., to say that the auctioneer has to either purchase all or none of a given set of transformations.

Single-unit vs. multi-unit auctions. There are multiple identical copies of each good in G . In particular, $\mathcal{U}_{in}, \mathcal{U}_{out}$, and the output bundles of multi-output tools are, in general, multisets. However, we are sometimes going to focus on the special case in which the specification of an auction instance only involves single-unit bundles. We refer to this as the *single-unit restriction*. Observe that, while also under the single-unit restriction the auctioneer might obtain two identical copies of the same good (e.g., by applying the same single-output tool twice), she never *needs* to do so: under the single-unit restriction, for any legal sequence Σ of length $\ell = |\Sigma|$ with $\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}_{out}$ there exists a legal sequence Σ' with $|\Sigma'| \leq \ell$ and $\Sigma' \rightsquigarrow \mathcal{U}_{out}$ for which the auctioneer never has to hold multiple copies of the same good, i.e., for which all \mathcal{M}^i are single-unit bundles as well.

No typing of goods. Tools and ordinary goods are all elements of G . We distinguish them by their *use* within a transformation, not by their essence. Thus, some $x \in G$ could play the role of a tool for one transformation and the role of a good being produced for another transformation. Alternatively, one could have one set of tools and one set of ordinary goods, and only use each for their special purpose. In particular, one could forbid that tools are consumed by tabac tools and thus are unavailable later on in Σ .

For some of our results, we are going to impose this latter restriction, which we refer to as the *nonconsumable-tool restriction*. Formally, it requires that G can be partitioned into G_a and G_b such that (1) for all tabac tools $t_{ac}^{ab} \in \mathcal{T}$ it holds that $a \in G_a$ and $b, c \in G_b$, and (2) all single- and multi-output tools in \mathcal{T} only involve goods in G_a .

¹Lifting this assumption does not affect the complexity results reported later on in this paper: for WINDET, all hardness results carry over immediately to the more general case (having a cost of 1 is a special case of having arbitrary costs). All membership results can also be extended to the case of arbitrary costs of transformations. In particular, the tractability results of Theorems 12 and 13 can be extended to this case because we can encode arbitrary costs in the reduction to the min-cost network flow problem.

Single tools. We restrict the number of tools required to execute a transformation to 1. Alternatively, one could also permit requiring multiple tools for a single transformation.

Tools only. We restrict attention to scenarios where the only actions available to the auctioneer consist in applying a tool to obtain certain goods. In practice, this should be combined with the option to simply purchase a bundle of goods. By including some default good \star in \mathcal{U}_{in} and ensuring that \star is never consumed by a tabac tool, we can simulate the option of purchasing the bundle B via the multi-output tool $t_{\star B}^{\star}$. Hence, in fact this is not a restriction.

3 Complexity Results

In this section, we present our results on the computational complexity of tool auctions.

These results show that FEASIBILITY is tractable for settings with only single- or only multi-output tools, while WINDET is not. For settings where tabac tools are allowed, even FEASIBILITY is not tractable in general. In fact, it is PSPACE-complete. For the complexity of WINDET in the presence of tabac tools, the encoding of K is relevant. When K is encoded as a binary number, then the problem is PSPACE-complete, while it is NP-complete when K is encoded as a unary number. All of our intractability results apply even under the single-unit restriction. Under the nonconsumable-tool restriction, on the other hand, if only tabac tools are allowed (i.e., if goods are typed), both FEASIBILITY and WINDET are tractable. Refer to Table 3 for an overview of these results.

Transformations	FEASIBILITY	WINDET
single-output tools	in P (Prop 1)	NP-c (Thm 2)
multi-output tools	in P (Prop 3)	NP-c (Thm 4)
tabac tools	PSPACE-c (Prop 7)	PSPACE-c (Thm 8) (K in binary)
		NP-c (Thm 9) (K in unary)
tabac tools with typed goods	in P (Prop 11)	in P (Thm 12)

Table 3: Overview of Complexity Results

For scenarios where finding a solution is intractable in general, it is often worthwhile to explore whether better results are achievable under the assumption that certain parameters of the problem can be kept small (Downey and Fellows 1999; 2013; Flum and Grohe 2006; Niedermeier 2006; Cygan et al. 2015). Regarding such fixed-parameter-tractability results, the bad news is that the most obvious choice of a parameter,

namely the maximum length of the solution $K \geq |\Sigma|$, is not a good choice. WINDET for multi-output tools parameterized by K is W[2]-hard and WINDET for tabac tools parameterized by K is W[1]-hard. A better choice for a parameter is the sum of the solution length K and the maximum number of goods that appear in any multi-output tool ($\max_{(\tau, \mathcal{I}, \mathcal{O}) \in \mathcal{T}} |\mathcal{O}|$). Another good choice is the size $|\mathcal{U}_{out}|$ of the desired output. For either one of these two parameters, WINDET for multi-output tools is fixed-parameter tractable (FPT). Finally, under the nonconsumable-tool restriction and for the parameter that is the sum of the number of tools which are used in a tabac tool and the number of tools appearing in \mathcal{U}_{out} , WINDET is FPT for any combination of our three types of transformations. Table 4 summarises our FPT results.

Transformations	Parameter	Result
single-output tools	$ \Sigma $	FPT (Cor 6)
multi-output tools	$ \Sigma $	W[2]-h (Thm 5)
multi-output tools	$ \mathcal{U}_{out} $	FPT (Cor 6)
multi-output tools	$ \Sigma + \max \mathcal{O} $	FPT (Cor 6)
tabac tools	$ \Sigma $	W[1]-h (Thm 10)
mixed tools under noncons.-tool restr.	$ \{a \mid t_{ac}^{ab} \in \mathcal{T}\} + \sum_{a \in G_a} \mathcal{U}_{out}(a) $	FPT (Thm 13)

Table 4: Parameterized Complexity Results for WINDET

3.1 Results for Single-Output Tools

For auction instances that only involve single-output tools, FEASIBILITY is easy, but WINDET is already hard.

Proposition 1. *If all transformations are single-output tools, then FEASIBILITY can be decided in polynomial time.*

Proof. We describe a greedy algorithm to construct Σ . We use a multiset \mathcal{M} to keep track of the bundle held by the auctioneer by the end of the prefix of Σ constructed so far. At any given point, $\mathcal{U}_{out} \setminus \mathcal{M}$ is the bundle we still need to obtain. Initialise \mathcal{M} with \mathcal{U}_{in} , and Σ with the empty sequence. Then, while there is some t_{ab}^a with $a \in \mathcal{M}$ and $b \notin \mathcal{M}$, add t_{ab}^a to the end of Σ , and add a copy of b to \mathcal{M} . After termination, report success if there is no $g \in \mathcal{U}_{out}$ with $g \notin \mathcal{M}$ and failure otherwise. This algorithm is easily seen to be correct and to run in polynomial time (for every element in G we have to inspect every transformation in \mathcal{T} at most once). \square

Theorem 2. *If all transformations are single-output tools, then WINDET is NP-complete, even under the single-unit restriction.*

Proof (sketch). To show membership in NP, it suffices to see that if a feasible solution exists, there is also a be feasible solution where any good is added at most once to the auctioneer's bundle. Thus only sequences Σ of length at most $|\Sigma| = |G \setminus \mathcal{U}_{in}|$ have to be considered.

Next, we prove NP-hardness under the single-unit restriction by reduction from 3SAT. Let $\varphi = \{c_1, \dots, c_m\}$ be a 3CNF formula with variables x_1, x_2, \dots, x_n . Without loss of generality, we may assume that φ contains the clauses

$(x_i \vee \neg x_i)$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$. We now construct an instance of WINDET. We let $G = \{z\} \cup \{x_i, \neg x_i, c_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, $\mathcal{U}_{in} = \{z\}$, $\mathcal{U}_{out} = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{lit} \cup \mathcal{T}_{cl}$ where $\mathcal{T}_{lit} = \{t_{z,x_i}^z, t_{z,\neg x_i}^z \mid 1 \leq i \leq n\}$ and $\mathcal{T}_{cl} = \{t_{x_i,c_j}^{x_i} \mid x_i \in c_j, c_j \in \varphi\} \cup \{t_{\neg x_i,c_j}^{\neg x_i} \mid \neg x_i \in c_j, c_j \in \varphi\}$. Finally, we let $K = n + m$. It is straightforward to verify that this reduction is correct. \square

3.2 Results for Multi-Output Tools

Next, we are going to see that, while the basic complexity results for multi-output tools mirror those for single-output tools, when considering the problem under the parameterized lens, additional sources of complexity become apparent.

Proposition 3. *If all transformations are multi-output tools, then FEASIBILITY can be decided in polynomial time.*

Proof (sketch). We can adapt the algorithm given in the proof of Proposition 1. The only difference is that in each round we have to look for a transformation t_{aB}^a with $a \in \mathcal{M}$ and either $B \cap (\mathcal{U}_{out} \setminus \mathcal{M}) \neq \emptyset$ or $B \cap (\{x \in G \mid t_{xy}^x \in \mathcal{T}\} \setminus \mathcal{M}) \neq \emptyset$ (and then add B to \mathcal{M}). \square

Observe that every single-output tool is a special case of a multi-output tool, so FEASIBILITY for combinations of single- and multi-output tools is polynomial as well.

Theorem 4. *If all transformations are multi-output tools, then WINDET is NP-complete, even for the single-unit restriction.*

Proof (sketch). NP-hardness follows from Theorem 2, as single-output tools are also multi-output tools. NP-membership can be shown by adapting the proof of Theorem 2. \square

While WINDET is FPT with respect to the length of Σ when only single-output tools are used (see Corollary 6 below), this is unlikely to be the case for multi-output tools.

Theorem 5. *If all transformations are multi-output tools, then WINDET is W[2]-hard when parameterized by $|\Sigma|$. This remains true even under the single-unit restriction.*

Proof (sketch). We describe an fpt-reduction from the W[2]-complete problem SET COVER. For this problem, inputs consist of triples (U, \mathcal{S}, k) , where U is a finite set, $\mathcal{S} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(U))$ is a set of subsets $S_i \subseteq U$ of U , and k is a positive integer. The question is whether there exists a set $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ of size at most k such that $\bigcup \mathcal{S}' = U$.

Let (U, \mathcal{S}, k) be an arbitrary instance of SET COVER. We construct an instance of WINDET using only multi-output tools. We let $G = \{\star\} \cup U$, $\mathcal{U}_{in} = \{\star\}$, $\mathcal{U}_{out} = G$. For each $S_i \in \mathcal{S}$, we introduce a multi-output tool t_{\star, S_i}^{\star} .

The legal sequences Σ of length at most k such that $\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}_{out}$ are in one-to-one correspondence with the subsets $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ of size at most k such that $\bigcup \mathcal{S}' = U$. \square

The following results follow directly from Theorem 13, which we will establish in Section 3.4.

Corollary 6. *If all transformations are single- or multi-output tools, then WINDET is fixed-parameter tractable when parameterized either (1) by $|\mathcal{U}_{out}|$, or (2) by $|\Sigma|$ plus the maximum number of goods that appear in any multi-output tool ($\max_{(\tau, \mathcal{I}, \mathcal{O}) \in \mathcal{T}} |\mathcal{O}|$).*

3.3 Results for Tabac Tools

When using (only) tabac tools, solving a tool auction can become highly intractable. This is true even under the single-unit restriction.

Proposition 7. *If all transformations are tabac tools, then FEASIBILITY is PSPACE-complete, even under the single-unit restriction.*

Proof (sketch). Membership in PSPACE can be shown routinely, by giving a nondeterministic algorithm that solves the problem in polynomial space. To show PSPACE-hardness, we can use a reduction that has been used to show that propositional planning is PSPACE-hard (Bylander 1994, Thm 3.1), reducing an arbitrary problem in PSPACE to the satisfiability problem of propositional planning. The planning operators used in this reduction correspond exactly to tabac tools. Moreover, the satisfiability problem for propositional planning corresponds exactly to the FEASIBILITY problem. In this reduction, all bundles involved are single-unit bundles. \square

The complexity of WINDET depends on how we encode K , the upper bound on the length of permissible solutions.

Theorem 8. *If all transformations are tabac tools, then WINDET is PSPACE-complete when K is encoded in binary. This remains true even under the single-unit restriction.*

Proof (sketch). Encoding K in binary allows us to express an exponential bound on the length of solutions. Therefore, the PSPACE-hardness proof of Proposition 7 also works for WINDET. Membership in PSPACE can be shown entirely analogously to the case of FEASIBILITY. \square

Theorem 9. *If all transformations are tabac tools, then WINDET is NP-complete when K is encoded in unary. This remains true even under the single-unit restriction.*

Proof (sketch). Membership in NP follows from the fact that when K is encoded in unary, we can guess a sequence Σ in polynomial time.

To show NP-hardness, we describe a reduction from WINDET for the case where all transformations are single-output tools (cf. Theorem 2). Let $(G, \mathcal{T}, \mathcal{U}_{in}, \mathcal{U}_{out}, K)$ be an arbitrary instance of WINDET where all $t \in \mathcal{T}$ are single-output tools. To G we add K new goods h_1, \dots, h_K . Each transformation $t_{ab}^a \in \mathcal{T}$ we replace by K tabac tools $t_{ab}^{ah_1}, \dots, t_{ab}^{ah_K}$. To \mathcal{U}_{in} , we add the goods h_1, \dots, h_K , and \mathcal{U}_{out} , and K we leave unchanged.

We omit a detailed proof of the fact that there exists a sequence Σ of length at most K such that $\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}_{out}$ for the original instance if and only if such a sequence exists for the newly constructed instance. \square

Theorem 10. *If all transformations are tabac tools, then WINDET is W[1]-hard when parameterized by K , even under the single-unit restriction with $|\mathcal{U}_{out}| = 1$.*

Proof (sketch). We describe an fpt-reduction from the W[1]-complete MULTICOLOURED CLIQUE (Fellows et al. 2009), which asks, given an undirected graph $\mathcal{G} = (V, E)$ the vertices of which are coloured with k colours, whether there is a clique in \mathcal{G} containing one vertex from each colour class (a *multi-coloured clique*). The parameter for this problem is k .

Given an instance of MULTICOLOURED CLIQUE with $\mathcal{G} = (V, E)$ where the vertex set V is a disjoint union of k colour classes $V_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$, and $k \in \mathbb{N}$, we construct an instance of WINDET as follows (we assume $k \geq 3$, otherwise an easier construction is possible). The set of goods is

$$G := \{\star\} \cup \{x_e \mid e \in E\} \cup \{z_e \mid e \in E\} \cup Y$$

with

$$Y := \{y_{i,j,\ell} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j < \ell \leq k, i \neq j, i \neq \ell\},$$

$\mathcal{U}_{in} = \{\star\}$, and $\mathcal{U}_{out} = Y$. The number of goods in the output is $|Y| = k \binom{k-1}{2}$. For each $e \in E$, we introduce transformations $t_{\star x_e}^*$ and $t_{x_e z_e}^{x_e}$, where the first transformation allows production of goods x_e and the second one allows production of goods z_e using x_e as a tool. Note that these transformations are single-output tools, but they can be transformed into tabac tools as done in the proof of Theorem 9. For each pair $e_1 = \{v_i, v_j\}$, $e_2 = \{v_i, v_\ell\} \in E$, with $e_1 \neq e_2$, $v_j \in V_j$, and $v_\ell \in V_\ell$, we create a tabac tool $t_{x_{e_1} y_{i,j,\ell}}^{x_{e_1} z_{e_2}}$. To put it into words, the tabac tool $t_{x_{e_1} y_{i,j,\ell}}^{x_{e_1} z_{e_2}}$ allows transforming z_{e_2} into a good $y_{i,j,\ell}$, using x_{e_1} as a tool, where e_1 and e_2 share a vertex in color class i , and have differing vertices in color classes j and ℓ , respectively. We let $K = \binom{k}{2} + 2k \binom{k-1}{2}$. The only way to produce all goods $y_{i,j,\ell}$ within the budget K is to first produce the goods x_e for all edges e in a multi-coloured clique, and then to use them as tools to produce the goods $y_{i,j,\ell}$ (with goods z_e as intermediate step).

If \mathcal{G} has a multicoloured clique of size k , we produce those goods corresponding to the $\binom{k}{2}$ edges of the clique by the single-output tools, i.e., we apply the transformation $t_{\star x_e}^*$ for each edge e of the clique. Since there is only one vertex of each colour class in the clique, we can produce in turn all output goods Y with the tabac tools given that we produce the good consumed in each step prior to the application of the tabac tool (which is possible since we have produced all necessary tools before). Hence, we end up with a legal sequence Σ of length $\binom{k}{2} + 2k \binom{k-1}{2}$ achieving \mathcal{U}_{out} .

Conversely, it can be checked easily that it is impossible to produce the entire set Y as an output in $\binom{k}{2} + 2k \binom{k-1}{2}$ steps if there is no multicoloured clique of size k in \mathcal{G} .

To achieve an output of size 1, let $k' := \binom{k-1}{2}k$ and re-name the elements of Y as $y_1, \dots, y_{k'}$; we create $k' - 1$ additional goods $y_{(1,2)}, \dots, y_{(1,\dots,k')}$ and the $k' - 1$ tabac tools $t_{y_{(1,\dots,i)} y_{i+1}}^{y_{(1,\dots,i)} y_{(1,\dots,i+1)}}$, where $y_{(1)} := y_1$. Then the new output set \mathcal{U}_{out} consists of the single element $y_{(1,\dots,k')}$. To account for this modification of the instance, we have to adapt the parameter to $K = \binom{k}{2} + 2k \binom{k-1}{2} + k' - 1$.

Also note that converting the single-output tools into tabac tools introduces new elements in \mathcal{U}_{in} . In the same notation as in the proof of Theorem 9 this introduces input goods $h_1, \dots, h_{k''}$, i.e., $\mathcal{U}_{in} = \{\star, h_1, \dots, h_{k''}\}$. Here, we

have $k'' = \binom{k}{2} + k \binom{k-1}{2}$ since we need one such good for each application of a single-output tool. \square

3.4 Results for the Nonconsumable Tools

Next, we consider auction scenarios that satisfy the non-consumable-tool restriction (see Section 2.2). As we shall see, under this restriction we can achieve particularly positive results. Intuitively, the nonconsumable-tool restriction makes both FEASIBILITY and WINDET easier to solve, because we can separate the application of tabac tools from the application of other transformations.

Indeed, as we shall see next, in such cases we can often solve auctions by reduction to a *minimum-cost network flow problem* (Ahuja, Magnanti, and Orlin 1993). Inputs for this problem consist of a directed graph $\mathcal{G} = (V, E)$ together with a positive integer $r \in \mathbb{N}$. The graph \mathcal{G} has a dedicated source node $s \in V$ (with only outgoing edges) and a dedicated target node $t \in V$ (with only incoming edges). Moreover, each edge $e \in E$ is associated with a cost $c_e \in \mathbb{N}$ and a capacity $u_e \in \mathbb{N}$. A *network flow* for \mathcal{G} is a mapping $\mu: E \rightarrow \mathbb{N}$ such that for each $e \in E$ it holds that $\mu(e) \leq u_e$ and for each $v \in V \setminus \{s, t\}$ it holds that $\sum_{e=(u,v) \in E} \mu(e) = \sum_{e=(v,u) \in E} \mu(e)$. We say that the *value* of a network flow μ is $\sum_{e=(u,t) \in E} \mu(e)$, and the *cost* of μ is $\sum_{e \in E} c_e \mu(e)$. The problem consists of finding a network flow of \mathcal{G} of value r that has minimum cost.

Recall that G_b is the set of goods consumed and produced by tabac tools, and G_a is the set of all other goods.

Proposition 11. *Under the nonconsumable-tool restriction, if all transformations are single-output, multi-output, or tabac tools, FEASIBILITY can be decided in polynomial time.*

Proof (sketch). First, we compute the maximum set $G'_a \subseteq G_a$ of goods among G_a that we can obtain from \mathcal{U}_{in} using transformations that are single- or multi-output tools, similarly to the algorithm described in the proof of Proposition 3. Then, we discard all tabac tools t_{ac}^{ab} for which $a \notin G'_a$. We then decide whether we can produce the desired quantity of goods in G_b (according to \mathcal{U}_{out}) from the quantities of goods in G_b that are available in \mathcal{U}_{in} . We do so by reducing the problem to an instance of the network flow problem.

We create a network containing a dedicated source node s , a dedicated target node t , and a node b for each good $b \in G_b$. For each $b \in G_b$, we add an arc from s to b with capacity $\mathcal{U}_{in}(b)$, and an arc from b to t with capacity $\mathcal{U}_{out}(b)$. Moreover, for each undiscarded tabac tool $t_{ac}^{ab} \in \mathcal{T}$, we add an arc from b to c with unlimited capacity. There is a network flow from s to t of value $\sum_{b \in G_b} \mathcal{U}_{out}(b)$ in this network if and only if there is a legal sequence Σ such that $\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}_{out}$. Since network flow is solvable in polynomial time (see, e.g., Ahuja, Magnanti, and Orlin 1993), we know that FEASIBILITY is as well. Existence of an integral solution is guaranteed as well, since all capacities are integral. \square

For WINDET, we cannot hope for a similarly positive result, given that it already is NP-complete for single-output tools alone (cf. Theorem 2), a scenario in which the

nonconsumable-tool restriction does not add any further constraints. However, when only tabac tools are used, we can still achieve a significant improvement over Theorems 9 and 10.

Theorem 12. *Under the nonconsumable-tool restriction, if all transformations are tabac tools, WINDET can be decided in polynomial time.*

Proof (sketch). We can use a similar construction as for the second part of the proof of Proposition 11. Now, to reduce the problem to the minimum-cost network flow problem, we simply assign unit cost to all arcs in the network (except for the arcs from s and the arcs to t , to which we assign cost 0). \square

As argued earlier, if we combine all three types of tools, WINDET is intractable, even under the nonconsumable-tool restriction. However, if we restrict the size of the problem appropriately, then we can construct an efficient algorithm even for this combined setting.

Theorem 13. *Under the nonconsumable-tool restriction, if all transformations are single-output, multi-output, or tabac tools, WINDET is fixed-parameter tractable when parameterized by (the sum of) the number k_1 of different goods in G_a that appear in some tabac tool, and the total number k_2 of goods in G_a that appear in \mathcal{U}_{out} , i.e., $k_1 = |G_{a, \text{tabac}}|$, where $G_{a, \text{tabac}} = \{a \mid t_{ac}^{ab} \in \mathcal{T}\}$, and $k_2 = \sum_{a \in G_a} \mathcal{U}_{out}(a)$.*

Proof. Take an arbitrary instance of WINDET that satisfies the condition from the statement above. Let $\mathcal{U}_{out,a}$ denote the multiset \mathcal{U}_{out} restricted to goods in G_a , i.e., $\mathcal{U}_{out,a}(g_a) = \mathcal{U}_{out}(g_a)$ for all $g_a \in G_a$ and $\mathcal{U}_{out,a}(g_b) = 0$ for all $g_b \in G_b$. Moreover, let $\mathcal{T}_{\text{tabac}}$ denote the set of all tabac tools $t_{ac}^{ab} \in \mathcal{T}$. The algorithm proceeds in several stages.

In the first stage, we use dynamic programming to compute a table with entries $D(s, G_1, G_2, m)$, for each $s \in G_a$, each $G_1 \subseteq \mathcal{U}_{out,a}$, each $G_2 \subseteq G_{a, \text{tabac}}$, and each $1 \leq m \leq |G_a|$. Each such table entry will contain ‘yes’ or ‘no’, depending on whether there exists a sequence Σ of length at most m that is legal for the bundle $\mathcal{U}_{in,s} = \{s\}$ and achieves (from $\mathcal{U}_{in,s}$) some bundle \mathcal{M} with $G_1 \subseteq \mathcal{M}$ and $G_2 \subseteq \mathcal{M}$. One could additionally store a witnessing sequence Σ for each entry containing ‘yes.’ The size of this table is bounded by $2^{k_1+k_2} \cdot \text{poly}(n)$ (where n denotes the input size), and we can fill its entries, by induction on m , in time polynomial in the size of the table and in the input size n , using a dynamic programming approach.

In the second stage, we use the table we computed in the first stage to fill a table with entries $D(G_1, G_2, m)$, for each $G_1 \subseteq \mathcal{U}_{out,a}$, and each $G_2 \subseteq G_{a, \text{tabac}}$. Each such entry $D(G_1, G_2, m)$ indicates whether there exists a sequence Σ of length at most m that is legal for \mathcal{U}_{in} and achieves some bundle \mathcal{M} with $G_1 \subseteq \mathcal{M}$ and $G_2 \subseteq \mathcal{M}$. Again, one could additionally store a witness for each entry containing ‘yes’ and filling the entries can be done in polynomial time, using a dynamic programming approach.

Then, in the third stage, we nondeterministically guess a subset $G'_{a, \text{tabac}} \subseteq G_{a, \text{tabac}}$ of goods in G_a that will occur in the tabac tools t_{ac}^{ab} appearing in sequence Σ achieving \mathcal{U}_{out} . (Since there are at most 2^{k_1} such sets $G'_{a, \text{tabac}}$, we can make

the algorithm deterministic by simply iterating over all possibilities.) Let $\mathcal{T}'_{\text{tabac}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{tabac}}$ denote the set of tabac tools t_{ac}^{ab} such that $a \in G'_{a,\text{tabac}}$. We then find the minimum length ℓ such that the table entry $D(\mathcal{U}_{\text{out},a}, G'_{a,\text{tabac}}, \ell)$ contains ‘yes’.

In the fourth, and final, stage of the algorithm, we determine whether we can extend the sequence Σ_0 of length ℓ that achieves a bundle including both $\mathcal{U}_{\text{out},a}$ and $G'_{a,\text{tabac}}$ to a sequence Σ of length at most K that achieves \mathcal{U}_{out} . We only need to consider (multiple applications of) transformations in $\mathcal{T}'_{\text{tabac}}$ to append to Σ_0 in order to obtain Σ . We encode the question whether we can obtain a suitable Σ by appending at most $K - \ell$ transformations to Σ_0 as an instance of the minimum-cost network flow problem.

This encoding is exactly the encoding used in the proof of Theorem 12. For this encoding, we use $\mathcal{U}_{\text{in}} + \mathcal{U}_{\text{out},a} + G'_{a,\text{tabac}}$ as input state. Moreover, we discard all single- and multi-output tools, as well as all tabac tools t_{ac}^{ab} for which $a \notin G'_{a,\text{tabac}}$. Finally, as upper bound on the length of the sequence Σ_1 such that $\Sigma = \Sigma_0 \Sigma_1$, we use $K - \ell$. This encoding can easily be done in polynomial time, and the constructed instance of minimum-cost network flow can be solved in polynomial time (see, e.g., Ahuja, Magnanti, and Orlin 1993).

We can straightforwardly modify this algorithm to return a legal sequence Σ such that $\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}_{\text{out}}$, if it exists. \square

4 Related Work

Our model of tool auctions follows prior work on market mechanisms for enabling automatic *supply chain formation* (Walsh, Wellman, and Ygge 2000; Walsh and Wellman 2003; Babaioff and Nisan 2004; Cerquides et al. 2007), even if the distinction between tools and ordinary goods has been absent from those earlier contributions. The model of Walsh and Wellman (2003), in particular, is similar to ours in that they also impose strong qualitative constraints on transformations. Their transformations have either exactly one output good (so-called ‘producers’) or no output goods at all (so-called ‘consumers’). Unlike us, they however also impose a strong structural constraint and require the graph defined by the set of transformations to be acyclic. Walsh and Wellman do not analyse the complexity of their model.

Cerquides et al. (2007) show that WINDET is NP-complete for *mixed auctions*. Tool auctions are a restricted form of mixed auctions—except for the fact that we permit unlimited use of transformations (see Section 2.2). This difference is crucial: Proposition 7, establishing PSPACE-completeness, holds only because a solution sequence could be exponentially long relative to the number of transformations available. In particular, this result does not contradict the NP-membership result of Cerquides et al. (2007).

Fionda and Greco (2013) analyse the complexity of mixed auctions in great depth. Part of their work focuses on *structural* restrictions, such as acyclicity, which we have not considered here. Structural restrictions are of interest when there is empirical evidence that they may be satisfied for typical real-world problem instances. Instead, our focus has been on *qualitative* restrictions, which can be imposed on each transformation in isolation and thus can simply be enforced in practice, by appropriately restricting the protocol used

for communicating bids. Fionda and Greco also establish important results on qualitative restrictions, which however are largely negative. In essence, they show that transformations with a single input and a single output good give rise to tractable problems, while even only allowing a second good at either the input or the output side makes things intractable. Our results show that better results are achievable by introducing the notion of ‘tool’ and using it to impose qualitative constraints between input and output goods.

The idea of trying to identify ‘tractability islands’ for solving combinatorial auctions, i.e., restrictions to the general setting that are both of practical interest for modelling application scenarios and that allow for optimal solutions that can be computed efficiently, goes back to the work of Rothkopf, Pekeć, and Harstad (1998) and has been explored by several other authors since then (Conitzer, Derryberry, and Sandholm 2004; Müller 2006; Gottlob and Greco 2007; Döcker et al. 2016).

Finally, there is a large body of work on other kinds of *combinatorial auctions* (Cramton, Shoham, and Steinberg 2006), which we do not review here. We emphasise, however, that *combinatorial exchanges* (Sandholm et al. 2002) differ from both tool auctions and the other auction models discussed here in that they do not require feasible solutions to correspond to a *sequence* of transformations. Instead, they only require the totality of all output goods to subsume the totality of all input goods.

5 Conclusion

We have introduced tool auctions and provided a detailed complexity analysis of both the feasibility and the winner determination problem of such auctions. With the exception of the feasibility problem for single- and multi-output tools, these problems are intractable in general. However, for the case of tabac tools, we have identified a special case of practical interest where they are polynomial-time solvable. In addition, we have analysed the winner determination problem from a parameterized complexity perspective and identified both tractable and intractable scenarios.

A first direction for future work concerns the development of practical algorithms for solving tool auctions. Our (fixed-parameter) tractability results point the way for the design of efficient algorithms for certain special cases. For cases that are intractable, techniques such as combinatorial optimisation and heuristic-guided search should be explored. A natural starting point is prior work on such methods for mixed auctions (Giovannucci et al. 2008; Ottens and Endriss 2008) and other generalisations of the basic combinatorial auction model (Sandholm et al. 2002).

A second direction concerns the analysis of real-world instances of our general model to get a clearer picture of what parameters can be assumed to typically take small values in practice. Besides industrial supply-chain management, possible applications include online freelancing platforms.

Acknowledgments. This work was partly supported by COST Action IC1205 on Computational Social Choice. RdH was furthermore supported by the Austrian Science Fund (FWF), project J4047.

References

- Ahuja, R. K.; Magnanti, T. L.; and Orlin, J. B. 1993. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall.
- Babaioff, M., and Nisan, N. 2004. Concurrent auctions across the supply chain. *Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)* 21:595–629.
- Bylander, T. 1994. The computational complexity of propositional STRIPS planning. *Artificial Intelligence* 69(1):165–204.
- Cerquides, J.; Endriss, U.; Giovannucci, A.; and Rodríguez-Aguilar, J. A. 2007. Bidding languages and winner determination for mixed multi-unit combinatorial auctions. In *Proc. 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*.
- Conitzer, V.; Derryberry, J.; and Sandholm, T. W. 2004. Combinatorial auctions with structured item graphs. In *Proc. 19th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*.
- Cramton, P.; Shoham, Y.; and Steinberg, R., eds. 2006. *Combinatorial Auctions*. MIT Press.
- Cygan, M.; Fomin, F. V.; Kowalik, L.; Lokshtanov, D.; Marx, D.; Pilipczuk, M.; Pilipczuk, M.; and Saurabh, S. 2015. *Parameterized Algorithms*. Springer.
- Döcker, J.; Dorn, B.; Endriss, U.; and Krüger, D. 2016. Complexity and tractability islands for combinatorial auctions on discrete intervals with gaps. In *Proc. 22nd European Conference on Artificial Intelligence (ECAI)*. IOS Press.
- Downey, R. G., and Fellows, M. R. 1999. *Parameterized Complexity*. Springer.
- Downey, R. G., and Fellows, M. R. 2013. *Fundamentals of Parameterized Complexity*. Texts in Computer Science. Springer.
- Fellows, M. R.; Hermelin, D.; Rosamond, F. A.; and Vialette, S. 2009. On the parameterized complexity of multiple-interval graph problems. *Theoretical Computer Science* 410(1):53–61.
- Fionda, V., and Greco, G. 2013. The complexity of mixed multi-unit combinatorial auctions: Tractability under structural and qualitative restrictions. *Artificial Intelligence* 196:1–25.
- Flum, J., and Grohe, M. 2006. *Parameterized Complexity Theory*. Texts in Theoretical Computer Science. Springer.
- Giovannucci, A.; Vinyals, M.; Rodríguez-Aguilar, J. A.; and Cerquides, J. 2008. Computationally-efficient winner determination for mixed multi-unit combinatorial auctions. In *Proc. 7th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*.
- Gottlob, G., and Greco, G. 2007. On the complexity of combinatorial auctions: Structured item graphs and hypertree decomposition. In *Proc. 8th ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*. ACM.
- Müller, R. 2006. Tractable cases of the winner determination problem. In Cramton, P.; Shoham, Y.; and Steinberg, R., eds., *Combinatorial Auctions*. MIT Press.
- Niedermeier, R. 2006. *Invitation to Fixed-Parameter Algorithms*. Oxford University Press.
- Nisan, N. 2006. Bidding languages for combinatorial auctions. In Cramton, P.; Shoham, Y.; and Steinberg, R., eds., *Combinatorial Auctions*. MIT Press.
- Ottens, B., and Endriss, U. 2008. Comparing winner determination algorithms for mixed multi-unit combinatorial auctions. In *Proc. 7th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*.
- Rothkopf, M. H.; Pekeč, A.; and Harstad, R. M. 1998. Computationally manageable combinatorial auctions. *Management Science* 44(8):1131–1147.
- Sandholm, T. W.; Suri, S.; Gilpin, A.; and Levine, D. 2002. Winner determination in combinatorial auction generalizations. In *Proc. 1st International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*.
- Walsh, W. E., and Wellman, M. P. 2003. Decentralized supply chain formation: A market protocol and competitive equilibrium analysis. *Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)* 19:513–567.
- Walsh, W. E.; Wellman, M. P.; and Ygge, F. 2000. Combinatorial auctions for supply chain formation. In *Proc. 2nd ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*. ACM.

B.5. Fall If It Lifts Your Teammate

Fall if it lifts your teammate: a novel type of candidate manipulation

Justin Kruger and Sebastian Schneckeburger

Abstract

We present a new interpretation of the traditional computational social choice framework, where what are traditionally the candidates are construed as the agents. The particular implementation in mind is the proposed system for determining the medal winners for sports climbing in the 2020 Olympic games. We consider the issues of ties and of potential manipulation with respect to this interpretation. Simulation results suggest that for the proposed system ties are unlikely to be a problem, but that there is at least potential for manipulation. We formalise the impossibility of manipulation with novel axioms. The strongest axioms lead to an impossibility along the lines of Arrow’s impossibility, while a small weakening leads to a possibility.

1 Introduction

The 2020 Olympic Games in Tokyo will inaugurate ten new gold medals; one male and one female in each of five new events: karate, skateboarding, surfing, baseball and sports climbing. Of these, sports climbing did not exist in a unique competition format before its introduction as an Olympic event. Instead, there are three distinct types of competitive climbing: bouldering, lead-climbing and speed-climbing. Each discipline requires different skills and measures the performance of athletes using different methods. Thus sports climbing is to be a composite event, similar to the pentathlon. The novel event will have, however, its own novel system of determining the medal winners.

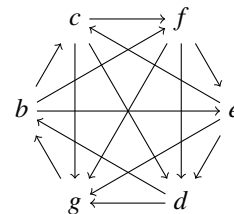
For Tokyo 2020 the International Federation of Sports Climbing (IFSC) has devised a combined format for sports climbing [11]. Twenty athletes—of which each country can have up to two representatives—will be involved in the main event. A qualification round reduces this number to six athletes who then compete in a final round to determine the medals. Both rounds proceed in the same manner: the contending athletes compete in all three disciplines, thereby producing three linear orders over the athletes. Each athlete is then assigned a score corresponding to the product of their rank in each discipline, where the rank of an athlete is the number of other athletes that defeat her plus one. These product scores provide a final ordering over the competitors, with lower scores being better. If two athletes receive the same score the tie is broken in favour of the athlete that performs better than the other in more disciplines.

As we have described it, the combined Olympic format may still lead to tied situations, because if more than two athletes receive the same product score the pairwise comparisons may form a cycle. Ties present a potential problem for both rounds of the competition. In the final round, it is desirable to have a single gold winner. In the qualifying round, tied situations may necessitate an extra method in order to determine which of the athletes progress—we provide an example to demonstrate the problem. The following table shows potential ranks of seven of the athletes after the qualification round, as well as bounds on the ranks of the other thirteen athletes given the specified results.

Athlete	Speed	Bouldering	Lead	Product
<i>a</i>	3	3	6	54
<i>b</i>	1	5	12	60
<i>c</i>	4	15	1	60
<i>d</i>	15	1	4	60
<i>e</i>	2	10	3	60
<i>f</i>	5	6	2	60
<i>g</i>	6	2	5	60
others	≥ 7	≥ 4	≥ 7	≥ 196

In this situation, *a* has the smallest product score and thus progresses to the final round. The unnamed athletes all have larger product scores than the seven named athletes, thus none of the unnamed athletes progress. There is a six way tie in the product scores of athletes *b* to *g*, thus one of these athletes must be eliminated from competing in the final round. For each pair of these athletes, we compare which athlete in the pair outperforms the other in more disciplines. This information can be concisely represented as a directed graph whose nodes are the tied athletes, with arrows to determine which athlete in each pair performs better. For instance, *b* performs better than *c* in speed and bouldering, thus we draw a directed arrow from *b* to *c*.

We display the graph representing the pairwise comparisons between the six tied athletes to the right. The particular arrangement of the athletes in a hexagon makes it clear that there is a cycle through the graph. Restricting attention to the six tied athletes, there is no *Condorcet loser*—no athlete that is pairwise defeated by all the others—as such it is not immediately obvious which of them should be eliminated.



We continue developing our example to demonstrate another potential problem with the combined Olympic format: it may prompt deliberate bad performances. Let us suppose that, through some tie-breaking procedure, *b* is eliminated.¹ If the remaining athletes perform the same in the final round as they did in the qualification round, the ranks and products will be the following.

Athlete	Speed	Bouldering	Lead	Product
<i>a</i>	2	3	6	36
<i>c</i>	3	6	1	18
<i>d</i>	6	1	4	24
<i>e</i>	1	5	3	15
<i>f</i>	4	4	2	32
<i>g</i>	5	2	5	50

Suppose that *a* and *c* have the same nationality. According to the predicted results *a* will not win a medal, and certainly not the gold, while her teammate *c* is on course for the silver. However, if *a* deliberately performs worse than *c* in the speed competition and all other ranks remain the same, *c* will become the unique gold medal winner with a product score of 12.² National loyalty may lead *a* to *manipulate* in this manner, thereby spoiling *e*'s efforts which would otherwise have been enough for a gold medal.

Our example demonstrates two potential problems with the proposed competition format for climbing: firstly ties, and secondly a phenomenon that we refer to as manipulation. Resolving a

¹The IFSC will use a "seeding list" to break ties that are not resolvable by pairwise comparisons. Such a seeding list is, in effect, an exogenous linear order tiebreaker. For the final round the ranking of the qualification round will be used as a seeding list; for the qualification round a seeding list based on the qualification system will be used [21].

²This would be feasible to perform in practice: in the speed competition in the final round, the third and fourth best speed-climbers will have at least one direct confrontation [11].

tie on factors other than the athletes' performances seems unfair, but may be necessary in order to determine which athletes progress to the final round. Ties are also undesirable in the final round—ideally, a gold medallist is unique. Concerning manipulation, an athlete who performs worse than she possibly may have done violates the Olympic spirit and cheapens the spectacle. Of course, only a very badly designed system would allow performing worse to lead to a better outcome for the manipulating athlete herself. We focus on the subtler case of *altruistic* manipulation, where the athlete aids a teammate by performing worse.

The rest of the paper is organised as follows. In Section 2 we define our framework, including two versions of altruistic manipulation. Section 3 is divided into two subsections in which we present our main results. Our simulation results in the first subsection show that, in fact, the probability of ties under the proposed method is quite low. On the other hand, it seems that there is a high potential for manipulation. This motivates a search for other methods that prevent the two kinds of manipulation; we discuss the theoretical possibility of such methods in the second subsection. Our theoretical results show that it is impossible to completely rule out manipulation, but we give a possibility for a plausible weakening. Section 4 provides a summary and further discussion; we discuss our framework's position with respect to other literature, possible extensions and other further work, and the relevance of our results to the climbing competition at the 2020 Olympics.

2 Definitions

Denote by $A = \{a, b, c, \dots\}$ the set of athletes and by $N = \{1, \dots, n\}$ the set of disciplines. We suppose that $m \geq 3$ and $n \geq 2$. Denote the set of linear orders on A by \mathcal{L} and the set of total preorders on A by \mathcal{W} . We use \succeq to denote a total preorder over the athletes, with \succ the asymmetric part. All the athletes compete in each discipline $i \in N$, resulting in n linear orders \succ_i over A . A *profile* that summarises the results for each discipline is denoted by $(\succ_1, \dots, \succ_n) = \succ \in \mathcal{L}^N$. A *ranking function* f uses these results to produce a total preorder over the competitors: $f: \mathcal{L}^N \rightarrow \mathcal{W}$.

The ranking function should not be confused with the *rank* of competitors. Athletes have a rank for each discipline and for the output total preorder. Formally, for an ordering \succeq over competitors, the rank of $a \in A$ is $r_{\succeq}(a) = |\{x \in A: x \succ a\}| + 1$. To simplify notation, for a discipline $i \in N$ we write $r_i = r_{\succ_i}$. Because lower ranks are better, \succ_i and the natural ordering on ranks are inverted: for all $x, y \in A$ and $i \in N$, $x \succ_i y$ iff $r_i(x) < r_i(y)$. The output can contain ties, though if two competitors are ranked first, no competitor is ranked second—a shared gold medal implies that no-one receives silver. We refer to athletes ranked first in the output as *winners*.

We can use a profile to make pairwise comparisons between athletes. Denote the distinct pairs of athletes by $D = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \neq y\}$. Given a profile \succ , define $\text{ct}_{\succ}: D \rightarrow \mathbb{Z}$ by

$$\text{ct}_{\succ}(x, y) = |\{i \in N \mid r_i(x) < r_i(y)\}| - |\{i \in N \mid r_i(y) < r_i(x)\}|.$$

For an arbitrary profile \succ the *weak majority relation* $T_{\succ} \subseteq A \times A$ is defined by $xT_{\succ}y$ iff $\text{ct}_{\succ}(x, y) \geq 0$. This relation is complete regardless of the parity of $|A|$. It may not be transitive: for a binary relation R we write R^+ for the transitive closure of R , the smallest transitive relation that contains R .

We now formally define the the proposed ranking function, insofar as it is determined by the profile of results. We call this function *inverse-Borda-Nash*,³ denoted by $\text{bn}: \mathcal{L}^N \rightarrow \mathcal{W}$. Define the

³This nomenclature is intended to be descriptive as it invokes Borda scores and the Nash product. The Nash product is sometimes described as providing a middle ground between the utility maximisation of additive methods and the maxi-min of egalitarian methods. However, this is not the case for the proposed method because the Borda scores are *inverted* i.e. smaller numbers are better. For addition, this inversion would have no effect, but this is not the case for multiplication. For example, according to inverse-Borda-Nash, an athlete with rankings (1,1,4) beats an athlete with (2,2,2); whereas for traditional Borda scores the inverse is true: (19,19,19) is better than (20,20,17). It is seen as an advantage of the method that it favours specialists—it is preferred that the winner of the combined format is a potential winner of world-cups in some individual discipline, rather than a generalist [21]. We are not aware of any precedent for this method, this may be because it would become an “anti-fairness” approach when applied to social choice or social welfare.

binary relation $Q \subseteq A \times A$ by

$$xQy \text{ iff } \begin{cases} \prod_{i \in N} r_i(x) > \prod_{i \in N} r_i(y) \\ \text{or} \\ \prod_{i \in N} r_i(x) = \prod_{i \in N} r_i(y) \text{ and } xT_{\succ}y. \end{cases}$$

Define $\text{bn}(\succ) = Q^+$; as Q is complete this is a total preorder.

2.1 Basic desiderata

There are some basic desiderata for a ranking function f . An athlete $x \in A$ clearly beats $y \in A$ in \succ if for all $i \in N$, $x \succ_i y$. We say f satisfies the *clear winner condition* if whenever x clearly beats y in \succ , then for $\succeq = f(\succ)$ it is the case that $x \succ y$. We say f is *neutral* if permuting the competitors in the profile similarly permutes the competitors in the output ranking: for any permutation $\sigma: A \rightarrow A$, given \succ and \succ' such that for all $x, y \in A$, $i \in N$ $a \succ_i b \Leftrightarrow a \succ'_i b$, then $af(\succ)b \Leftrightarrow af(\succ')b$. Our last desiderata limits how much a single discipline can determine the winner. For a ranking function f , we say the gold is determined by $i \in N$ if, for any profile \succ and writing $\succeq = f(\succ)$, $r_i(x) = 1$ implies $r_{\succeq}(x) = 1$. We say f is *non-determined* if the gold is not determined by any $i \in N$.

Each of these three desiderata can be linked to axioms from social choice theory. The clear winner condition is called, for e.g., the ‘‘Pareto criterion’’ [6, p. 42]. ‘‘Neutral’’ is standard terminology in social choice theory. A discipline that determines the gold may be thought of as a ‘‘weak top-dictator’’: an agent that can force his top ranked alternative to be among the top ranked alternatives in the output—note that this is a particularly weak version of a dictatorship.

2.2 Formal definitions of manipulation

The traditional definition of manipulation in social choice theory involves insincere representation of preference [8, 20]. Manipulation by an individual involves any possible change to one of the orderings in the profile. The situation we consider is slightly different: a potential manipulator has a position within each ordering and can manipulate, individually, by changing her position in multiple orderings. Also, she is restricted in the type of change she can make to each ordering; specifically, she can only make her own ranking worse: an athlete cannot perform better than her best.

The restriction on manipulation means that purely individual manipulation is not possible if the method satisfies a weak version of monotonicity. A ranking function f satisfies *ranking monotonicity* if for any two profiles $\succ, \succ' \in \mathcal{L}^N$ with $f(\succ) = \succeq$ and $f(\succ') = \succeq'$, for any competitor $a \in A$, if for all $i \in N$, $x \in A \setminus \{a\}$ and $y \in A$ it is the case that $x \succ_i y$ implies $x \succ'_i y$, then $r_{\succeq}(a) \leq r_{\succeq'}(a)$. In words, this requires that an individual cannot increase their own output ranking by performing worse.

Inverse-Borda-Nash satisfies ranking monotonicity, thus prevents purely individual manipulation. However, two athletes of the same nationality can compete in the sports climbing event: an athlete may be able to altruistically manipulate for their teammate. In particular, a manipulator may be able to improve their teammate’s ranking without worsening their own output ranking.

Definition 1 (Non-sacrificial manipulation). *Let $f(\succ) = \succeq$ and $f(\succ') = \succeq'$, and $a, b \in A$. Athlete a can manipulate without sacrifice, for athlete b , from the profile \succ to the profile \succ' if*

1. for all $i \in N$, $x \in A \setminus \{a\}$ and $y \in A$, $x \succ_i y$ implies $x \succ'_i y$
2. $r_{\succeq'}(b) < r_{\succeq}(b)$
3. $r_{\succeq'}(a) \leq r_{\succeq}(a)$.

Such a manipulation is strictly without sacrifice if it also satisfies

4. $|\{x \in A : x \succeq' a\}| \geq |\{x \in A : x \succeq a\}|$.

A ranking function f prevents manipulation without sacrifice if there is no pair of profiles and pair of competitors that can manipulate without sacrifice. The strictness condition makes it harder to manipulate: the idea is that an athlete prefers to be uniquely ranked in a position than to share this ranking with multiple athletes. This makes preventing strictly non-sacrificial manipulation a weaker condition than preventing all kinds of non-sacrificial manipulation. This will make the difference between an impossibility and possibility result.

The example of manipulation in the introduction is not without sacrifice. Instead, the idea is that the manipulating athlete recognises that she cannot get a higher ranking than her teammate, but can nonetheless manipulate to aid her teammate. We call this “spoiler” manipulation, this refers to the fact that a poorly ranked athlete spoils the fair result concerning other, better ranked, athletes.

Definition 2 (Spoiler manipulation). *Let $f(\succ) = \succeq$ and $f(\succ') = \succeq'$, and $a, b \in A$. Athlete a can spoil, for athlete b , from the profile \succ to the profile \succ' if*

1. for all $i \in N$, $x \in A \setminus \{a\}$ and $y \in A$, $x \succ_i y$ implies $x \succ'_i y$
2. $r_{\succeq'}(b) < r_{\succeq}(b)$
3. $r_{\succeq'}(b) < r_{\succeq}(a)$.

Where it is not necessary to specify b or the profiles, we say that a spoils.

Ranking monotonicity prevents the special case of manipulation where an athlete manipulates for herself. That is, if f prevents manipulation (strictly) without sacrifice, or if f prevents spoiler manipulation, then f satisfies ranking monotonicity.

3 Results

Inverse-Borda-Nash satisfies the three basic desiderata.

Proposition 1. *Inverse-Borda-Nash satisfies the clear winner condition, is neutral, and is non-determined.*

Proof. Clear winner: if an athlete is ranked better than another in all disciplines, it must have a smaller product of ranks, therefore will be ranked better in the output.

Neutrality: if we permute athletes, we also permute their product scores and the relation T_{\succ} .

Non-determined: for an arbitrary discipline $i \in N$, take a profile where some athlete $a \in A$ comes first in all other disciplines and second in this discipline: $r_i(a) = 2$ and $r_j(a) = 1$ for all $j \in N$, $j \neq i$. If $n > 2$, then a is the unique winner, thus the discipline does not determine the gold. For $n = 2$, the following profile shows that i does not determine the gold (we use the assumption that $m \geq 3$):

Athlete	i	$j \neq i$	Product
a	2	1	2
b	1	3	3
c	3	2	6
others	≥ 4	≥ 4	≥ 16

□

However, inverse-Borda-Nash may produce ties and is potentially manipulable. We determine whether these issues are likely to occur by simulating competitions in the next subsection. We apply a theoretical analysis in the subsection that follows.

Culture	Ties	Spoiler manipulation	Without sacrifice	Strict without sacrifice	Any manipulation
Impartial	632	37,730	47,807	47,326	59,660
Positive cor.	779	13,792	43,723	41,597	46,964
Negative cor.	526	44,826	48,741	48,350	63,151

Table 1: The number of randomly generated profiles that involved ties, were subject to spoiler manipulation, were subject to manipulation without sacrifice, were subject to manipulation strictly without sacrifice, and that were subject to any of the manipulations that we define. 100,000 profiles were generated for each culture.

3.1 Simulations

Our simulations suggest that for inverse-Borda-Nash, although ties are unlikely to be a problem, potential for manipulation occurs with a high probability.

We generated profiles with six athletes and three disciplines, the same numbers as in the final round of the Olympics sports climbing competition. The generated profiles form three groups: in the first group, for each discipline every possible linear order is equally likely—this is the *impartial culture* [22]. For profiles in the second group there is a positive correlation in an athlete’s results across the three disciplines. In the final group there is positive correlation between two disciplines and negative correlation with the third. This third culture conforms best to our actual expectations for the competition because the two disciplines of bouldering and lead climbing have an intersection of athletes at the top level, whereas top level speed climbers do not typically compete in the other disciplines.

For an impartial culture profile we independently select each of the linear orders uniformly at random from the set of all possible linear orders. Concerning the positively correlated culture, we also select the linear orders independently from each other, in the following manner. Label the athletes from a to f . Each linear order is constructed by successively adding athletes to partially completed linear orders, starting with the linear order consisting of only athlete a . We then flip a fair coin to decide whether b is placed before or after a , thereby creating a linear order over the two athletes. Next we add c : with probability $1/2$ we place her last in the partially constructed linear order; otherwise, we flip a second fair coin to see whether she is placed second in the linear order or first. The same idea is then applied to the other athletes: for each we successively flip a fair coin to determine whether or not the athlete is placed at an incrementing position in the partially constructed linear order, starting from the last position. A negatively correlated profile is created by taking a positively correlated profile and reversing the linear order of the last discipline.

We randomly generated 100,000 profiles of each type. A profile counts as tied if at least one tie occurs at any ranking level—we do not count the number of distinct ties nor how many athletes are involved in each tie. To count manipulations, we first randomly pair the athletes into three disjoint pairs. A profile counts as manipulable if at least one of the pairs can manipulate. We perform the count separately for spoiler manipulation, manipulation without sacrifice, manipulation strictly without sacrifice, and for any type of manipulation. The results are presented in Table 1.

According to our models, it is very unlikely that there will be a tie at any level of the output total preorder in the final round of the competition. We also ran simulations for twenty athlete profiles obtaining similar results.⁴ This strongly supports the idea that a tie in the actual competition is very unlikely to occur: note that each of our models exhibits a high degree of symmetry; one would expect that such symmetries would be the most likely to cause tied situations. Indeed, it has been shown

⁴For profiles with twenty athletes, of the 100,000 profiles we generated for each culture, 208 profiles had ties for the impartial culture, 1108 profiles had ties for the positively correlated culture, and only 92 profiles had ties for the negatively correlated culture that conforms best to our expectations for the actual competition.

that the impartial culture maximises the probability for majority cycles [22], one of the necessary conditions for a tie. However, from our simulations we see more ties for the positively correlated culture: this is perhaps because two opposing criteria need to be fulfilled for there to be a tie; there need to be majority cycles, but these must occur among athletes with the same *scores*. Regardless, the incidence of ties is low even for the positive culture. Of the three cultures, we see fewest ties in the negatively correlated culture which best represents our expectations for the competition.

In contrast to the low incidence of ties, there does seem to be a high potential for manipulation, of both kinds. For each culture approximately half the profiles are manipulable.⁵ We make two further observations: first, the incidence of *non*-strict manipulation without sacrifice is very small—the value obtained when subtracting the value of column five from the value of column four. A loose interpretation is that for inverse-Borda-Nash there is not much difference between the stronger and weaker versions of the without sacrifice axiom. Second, spoiler manipulation seems less likely under the positively correlated culture. An intuitive explanation for the lower incidence of spoiler manipulation for the positively correlated culture is the following: for this culture it is more likely that one athlete in a pair will *always* be ranked above their teammate, in which case the lower ranked athlete cannot spoil. Nevertheless, even for the positive culture there is a non-negligible potential for spoiler manipulation (more than 10% of the generated profiles).

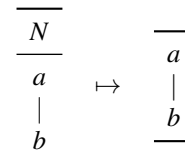
3.2 Theoretical results

We want to define a method that satisfies our desiderata and completely prevents both forms of manipulation. Unfortunately, it is impossible to completely succeed in this task.

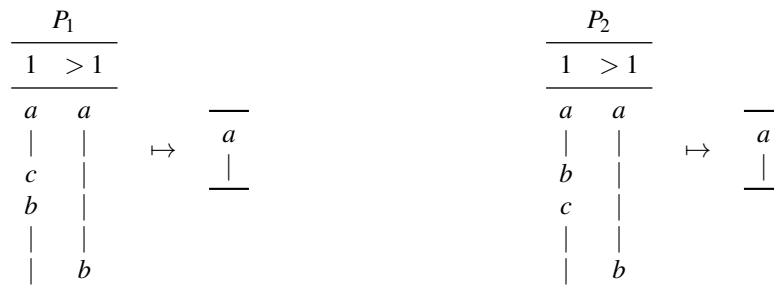
Theorem 1. *No ranking function prevents spoiler manipulation, prevents manipulation without sacrifice, satisfies the clear winner condition, and is non-determined.*

Proof. We show something slightly stronger: if both types of manipulation are prevented and the clear winner condition is satisfied then there is a *top-dictator*: a discipline $i \in N$ such that, for $a \in A$ such that $r_i(a) = 1$, $a \succ x$ for all $x \neq a$. This directly implies that the function is determined. The proof follows the structure of the proof of Arrow’s theorem by Reny [17].

Take an arbitrary ranking function f that prevents spoiler manipulation and manipulation without sacrifice and that satisfies the clear winner condition. Consider any profile where a comes first in all disciplines and b comes last. By the clear winner condition a must be ranked first and b last. We express this fact as in the diagram to the right.



Now consider moving b up in the first discipline. So long as b does not cross above a , a must still be uniquely ranked first, as otherwise the agent c that b becomes ranked above can spoil for the new winner from P_1 to P_2 .



⁵We also tested profiles with twenty athletes for manipulation. Each culture resulted in higher counts of potential manipulation than in the six athlete case. Of course, to fully address the issue of manipulation in the qualification round would require other modifications: here a manipulation is only desirable if it moves the target agent below the sixth place threshold; more fundamentally we require an argument for why the non-manipulated profile is common knowledge.

If we rank b above a , either a remains the unique winner or there is some other set of winners. If we continue to rank b first successively for the remaining disciplines, eventually b becomes the unique winner by the clear winner condition—in particular when b is ranked first in all disciplines—thus the second disjunct of the previous sentence happens at some point; there is a profile that outputs a top, while if b is moved above a in one discipline the set of winners is X with some $x \in X$ such that $x \neq a$. Label the discipline for which this happens i^* and label the respective profiles as P_3 and P_4 .

P_3		P_4
$\begin{array}{ccc} < i^* & i^* & > i^* \\ \hline b & a & a \\ a & b & \\ & & \\ & & b \end{array}$	\mapsto	$\begin{array}{ccc} < i^* & i^* & > i^* \\ \hline b & b & a \\ a & a & \\ & & \\ & & b \end{array}$
$\begin{array}{c} \hline a \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{c} \hline b \\ \hline \end{array}$

We know that $a \notin X$, otherwise a could spoil without sacrifice for x from P_3 to P_4 . This implies that $b \in X$, as otherwise b could spoil for a from P_4 to P_3 . This implies that $x \notin X$ for $x \neq a, b$, as otherwise b could manipulate without sacrifice for x from the profile where b is the unique winner.

In P_4 we can move a down in the profile without changing the output winner b (otherwise a could spoil), we display this as P_5 . Create P_6 from P_5 by moving a up one place in discipline i^* .

P_5		P_6
$\begin{array}{ccc} < i^* & i^* & > i^* \\ \hline b & b & \\ & a & \\ & & \\ & & a \\ a & & b \end{array}$	\mapsto	$\begin{array}{ccc} < i^* & i^* & > i^* \\ \hline b & a & \\ & b & \\ & & \\ & & a \\ a & & b \end{array}$
$\begin{array}{c} \hline b \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{c} \hline a \\ \hline \end{array}$

Athlete a must be the unique winner in P_6 . First, note that if neither a nor b were ranked first for P_6 , then a can spoil for b from P_6 to P_5 . If b is ranked first but not uniquely ranked first, then b can spoil without sacrifice from P_5 to P_6 . If b is uniquely ranked first, then at some point in stepwise changes from P_6 to P_3 some other athlete must perform a spoiler manipulation. Thus as b is not ranked first a is amongst the winners. If a were not unique, a could spoil without sacrifice from P_3 to P_6 .

Take some third alternative $c \neq a, b$. The profile P_7 is obtained from P_6 by moving b and c down in the profile. Here the unique winner is still a , as otherwise b or c could spoil. Create P_8 by moving a to be ranked last in all disciplines except i^* .

P_7		P_8
$\begin{array}{ccc} < i^* & i^* & > i^* \\ \hline & a & \\ & & \\ c & & c \\ b & c & a \\ a & b & b \end{array}$	\mapsto	$\begin{array}{ccc} < i^* & i^* & > i^* \\ \hline & a & \\ & & \\ c & & c \\ b & c & b \\ a & b & a \end{array}$
$\begin{array}{c} \hline a \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{c} \hline a \\ \hline \end{array}$

In the profile P_8 , alternative c is a clear winner over b , so b cannot be ranked first. If a were not ranked first then b could spoil for a from P_8 to P_7 . If any other athlete is ranked first, then a can manipulate without sacrifice from P_7 to P_8 . Thus a must be the unique winner in P_8 .

In general, for any profile where a wins in discipline i^* , a must be uniquely ranked first in the output, as otherwise there would be some chain of changes from P_8 to the profile in question, one of which would be a spoiler manipulation for the new winning athlete. As a is arbitrary, for each

alternative x there is a discipline i_x such that whenever x wins in i_x , x is uniquely ranked first. As two alternatives x and y cannot both be ranked first, $i_x = i_y$ for all $x, y \in A$, thus i^* is a top dictator. \square

The proof closely follows Reny [17], who presents Arrow's impossibility and the Gibbard-Satterthwaite theorem side by side. Although we consider manipulation, the result is, in terms of its formal shape, closer to Arrow's result than to the Gibbard-Satterthwaite result. Requiring the impossibility of both forms of manipulation replaces the axiom of independence of irrelevant alternatives (IIA), though this requirement does not *imply* IIA. Consider the ranking function that always returns only two ranks, one consisting of only the alternative a and the other consisting of all the other alternatives, such that a is ranked first iff a is first in all the disciplines; this violates IIA but prevents both kinds of manipulation. Alongside the fact that non-determined is a weakening of non-dictatoriality, this means that our impossibility is not simply a corollary of Arrow's theorem.

We cannot satisfy all our desiderata simultaneously. However, if we weaken manipulation without sacrifice to manipulation strictly without sacrifice there are methods that work. The method we define proceeds in stages, determining the top ranked candidates then removing them from the profile. It may be thought of as a back-to-front version of *instant runoff voting* [26, p. 37] applied using a *majority quota rule*. Also cf. the *Coombs rule* [10]. If an athlete is ranked first in strictly more than half the disciplines, then she is the unique winner with respect to the athletes in the profile. Otherwise, any athlete that has at least one first place ranking in the profile is a joint winner. The winners are removed from the profile, and the procedure repeats. We name this *iterative first place elimination*, $\text{ifpe} : \mathcal{L}^N \rightarrow \mathcal{W}$. Formally, for an arbitrary profile \succ , let

$$\text{win}(\succ) = \begin{cases} \{a\} & \text{if } \exists a \in A, |\{i \in N : r_i(a) = 1\}| > n/2, \\ \{x \in A : \exists i \in N, r_i(x) = 1\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let $\succ^1 = \succ$. For $t \geq 1$, recursively define \succ^{t+1} as the restriction of \succ^t to $A \setminus \text{win}(\succ^t)$. Writing $\succeq = \text{ifpe}(\succ)$, for $x, y \in A$, define $x \succeq y$ iff there are integers s, t such that $s \leq t$ and $x \in \text{win}(\succ^s)$ and $y \in \text{win}(\succ^t)$.

Proposition 2. *Iterative first place elimination prevents spoiler manipulation, prevents manipulation strictly without sacrifice, satisfies the clear winner condition, satisfies neutrality, and, for $n \geq 3$, is non-determined.*

Proof. Prevents spoiler manipulation: an athlete cannot affect any of the partial profiles \succ^t starting from $t = 1$ until the profile where she is ranked first in one of the disciplines. Consider the partial profiles for which she is ranked first. There are two possibilities. (1) The athlete is not a winner for the partial profile, thus a different athlete is ranked first in more than half the disciplines; this other athlete will be the winner no matter how the putative manipulator changes her ranking. (2) The athlete is a winner for the partial profile, thus she cannot spoil because she does as well as the remaining athletes.

Prevents manipulation strictly without sacrifice: an athlete a cannot affect athletes that get better output ranks. Let \succ be the partial profile for which $a \in \text{win}(\succ)$. First suppose a is ranked first in more than half the disciplines: if she performs worse in enough of these disciplines she will no longer be the unique winner, but such a manipulation is not strict. Otherwise, she will be removed from the profile in the next step, thus any changes to her ranking do not affect the output. Second suppose a is ranked first in less than half the disciplines. If a performs worse in a discipline i for which $r_i(a) > 1$, this will not affect the output ranking as a is removed from the profile in the next round. If a performs worse in a discipline i for which $r_i(a) = 1$, there are three possibilities. (1) A different athlete becomes the unique winner, thus a is ranked lower in the output. (2) A new athlete becomes a winner, in which case the manipulation is not strict. (3) The winners remain the same, thus the same athletes will be removed from this profile and the output will not change.

Clear winner: if a is ranked better than b in all disciplines, it is not possible that b is ranked first in a partial profile while a is still contained in the profile.

Neutrality: permuting the athletes in the profile will result in permuted sets $\text{win}(\succ)$.

Non-determined: here we require the condition that $n \geq 3$; for arbitrary $i \in N$ consider the profile

Athlete	$\{i\}$	$N \setminus \{i\}$
a	2	1
b	1	2
others	≥ 3	≥ 3

□

Iterative first place elimination is unsatisfactory because it is *indecisive*, where we use the (slightly imprecise) term “decisiveness” to refer to a measure of how often ties are produced in the output. At the sharpest end, a maximally decisive method would always produce a linear order. Requiring this level of decisiveness recreates the impossibility because it makes manipulation without sacrifice equivalent to the strict manipulation without sacrifice. However, maximal decisiveness is arguably too strong a condition: for completely symmetric profiles, it seems reasonable in practice that conditions external to the profile break the ties. We are not aware of an axiomatic analysis of decisiveness that provides suitably weaker definitions that further investigation may be based upon.

4 Final remarks

In this paper we propose a novel interpretation of Arrow’s traditional social choice framework involving the aggregation of linear orders. Under this interpretation what are traditionally thought of as candidates are the agents of the model. These agents can strategize in a specific manner: they can worsen their own position within one or more of the input linear orders. This interpretation captures the problem of aggregating multiple ranked competitions. In particular we consider the method proposed for determining the medal winners for climbing at the 2020 Olympics. Simulations suggest that, although ties are unlikely to occur, this method is potentially open to manipulation. Although it is impossible to completely rule out the least restrictive definitions of manipulation, a small assumption about how athletes are willing to manipulate means that non-manipulable methods are possible. The method that demonstrates this possibility is, however, very susceptible to ties.

Our interpretation is novel to the best of our knowledge. Other work concerning manipulation in sports competitions includes work concerning manipulating seedings [18], and tends to be of a more operations-research nature than social-choice-theoretic, see [23] for a survey. We are not aware of other work that explicitly considers candidates as agents in the way that we do—our work is distinct from the strand of literature which considers manipulation by strategic candidacy [5, 7, 14]. Of course, there are similarities between our results and more traditional work in social choice theory, and there may be implicit connections that we have missed, for example with the definitions of *Condorcet independence of irrelevant alternatives* [25] or *one-way monotonicity* [19].

Our interpretation fits well into Arrow’s framework. Arguably, the problem of aggregating multiple disciplines is better served by this framework than typical problems of social choice theory. The linear order profile is the input in practice. There are no questions, as there are for social choice theory, about whether eliciting full linear orders is problematic, let alone whether linear order preferences are suitable or even sensible—cf. competing approaches like approval voting [15] and majority judgment [1].⁶ The required output is also obviously a total preorder, whereas in so-

⁶ Rather than linear order profiles, it would be possible to use a method that assigns points based upon individual performances. Thus the final score for an athlete would be necessarily independent of the performance of other athletes, sidestepping our issue of manipulation. Such a method is used for the modern pentathlon. This approach was discarded by the IFSC because (1) it is too complex for spectators and (2) it is difficult, perhaps impossible, to assign points in a balanced way across the disciplines [21]. We thus take it as given that the input is ordinal.

Interestingly, Balinski and Laraki [1] use the example of Olympic figure skating as part of their argument against the ordinal approach in social choice. In the past the ranking of skaters was produced by aggregating multiple *ordinal* rankings given by multiple judges. The particular method has since been replaced, and it is argued that this is because it violates

cial choice theory often what is desired is a *choice*, requiring a “social choice function” as opposed to a “social welfare function”. Sometimes it is not obvious that manipulation is actually undesirable for social choice theory, especially when one considers iterative manipulation [16]. Indeed, “manipulation” is a misnomer, a better term would be *strategic behaviour*. In contrast, for sports competitions manipulation is aptly named and clearly undesirable in and of itself, whether because it goes against the spirit of the competition or because it cheapens the spectacle. Concerning the information requirements for manipulation, we have argued that the qualification round can be used as a proxy for the results in the final round. This is unrealistic—the athletes will not perform exactly the same—however it is certainly not less realistic than the traditional Gibbard-Satterthwaite assumption of common knowledge of all preferences of all agents.

There is one way in which our interpretation has a slightly different focus from that of traditional social choice: it stresses the importance of having a minimal *rank*; an athlete is only concerned with the number of athletes ranked *strictly higher* than her in the output total preorder. Another difference is a particular importance on the “decisiveness” of the ranking method; how often ties are output at any ranking level. Authors often sidestep the issue of ties in order to obtain their main results, by supposing that there is an exogenous linear order tiebreaker or by restricting the output to linear orders [26, p. 33], but this is obviously unsatisfactory for our purposes because it is the issue of ties itself that we are interested in. Alternative approaches such as using a randomised mechanism to break ties or dealing directly with set-valued outcomes [2] are similarly unsatisfactory. We are not aware of a good reference for this subject.

Our impossibility result is perhaps not very exciting. Even though it is a *non-trivial* adaptation of Arrow’s famous impossibility, because preventing manipulation is not equivalent to independence of irrelevant alternatives, it remains only an adaptation. For completeness, we note that the impossibility is tight for the four conditions. *Dictatorships*, where the ranking of a single discipline are copied, violate only non-determination. *Constant functions* violate only the clear winner condition, except the function that always ranks every athlete first. (Constant functions also violate neutrality, but this is not included in the impossibility.) Our method of *iterative-first-place-elimination* only allows manipulation without sacrifice. Finally, we sketch an upside-down variant of instant runoff voting that only allows spoiler manipulation: at stage t , remove the athlete who is ranked last in discipline t modulo n , and rank this athlete below the other athletes remaining in the profile. A formal definition and proof of properties is in the appendix.

Our positive result is interesting in part because of its unsuitability: it would certainly produce too many ties to be useful in practice. On the other hand, completely prohibiting ties recreates the impossibility. It would be interesting to determine if there is a satisfactory middle ground, but as we have already noted there seems to be an intriguing gap in, at least our knowledge of, the literature.

One of the originating ideas of *computational* social choice is that, even if manipulation is possible in theory, it might be computational hard to determine a strategy for manipulation, thus manipulation is unfeasible in practice [3]. Of course, it is obviously easy in practice to find manipulations for the proposed competition format with its fixed parameters of three disciplines and six or twenty athletes, otherwise our simulations would still be running. The complexity of finding a worthwhile manipulation for a pair—spoiler or without sacrifice—is polynomial in the number of athletes, one need only check the result for the (less than) 2^n profiles where the manipulator does just worse than her teammate for each possible subset of the disciplines. We do not know whether or not varying the amount of disciplines leads to a hardness result.

An interesting extension of our model would be to apply the *protocol approach*, where one considers partial revelation of the profile in a sequential manner. This is precisely how the Olympic sports climbing event will unfold, though it should be noted that there will be measures put in place to isolate the athletes from the partial results—perhaps a determined manipulator will find a way around these. A sequential extension would also be applicable to other competition formats. There

independence. Balinski and Laraki thus go in the opposite direction to us: they use experience from the Olympics and apply it to social choice theory.

is already a literature of related results concerning necessary and possible winners (stemming from [13]) which should greatly aid the development of such an extension.

One can postulate a variant of Murphy’s law for sport competitions: “If a sport competition is susceptible to a certain kind of manipulation, some day some athlete will manipulate in that way”. There is evidence for this law; cheating occurs in the Olympics, and specifically deliberate bad performances [12, 24]. The combined format for sports climbing is susceptible to a particular kind of altruistic manipulation that has been observed to occur in Formula 1 [9].⁷ So do we expect a wave of manipulation at Tokyo 2020? Probably not: in favour of the proposed method for climbing, we do not believe that such manipulation is likely to happen in practice. Athletes will be held in isolation during several rounds, so unless there is some information leak they won’t have enough information to successfully manipulate according to a protocol approach. This will not prevent athletes from using the results of the qualification round as a proxy, as we suggest in the example in the introduction. However, in practice this proxy will not be reliable. Lead-climbing routes and boulder problems are not standardised. For instance some problems can be easier for tall athletes, while others are easier for small athletes; the problems in the qualifying round may favour one type and those in the final round the other. Similarly, an athlete may rise to the challenge and perform better in the final round than in the qualifying round, or vice-versa crack under the pressure. Given the unpredictable nature of the final event, it will be hard to ensure that the intended manipulation does not have unintended effects.

A Method that only allows spoiler manipulation

The following method is closely related to the Combs rule [10]. Define *iterative successive last removal*, $\text{isr}: \mathcal{L}^N \rightarrow \mathcal{W}$ as follows. For an arbitrary profile \succ , let $\text{lose}_t(\succ) = \{a \in A : r_t(a) \text{ is maximal}\}$. Let $\succ^1 = \succ$, and for $t \geq 1$ recursively define \succ^{t+1} as the restriction of \succ^t to $A \setminus \text{lose}_t \text{ mod } n(\succ^t)$. Writing $\succ = \text{isr}(\succ)$, for $x, y \in A$, define $x \succeq y$ iff there are integers $s, t \leq m$ such that $s \geq t$ and $x \in \text{lose}_s \text{ mod } n(\succ^s)$ and $y \in \text{lose}_t \text{ mod } n(\succ^t)$.

Proposition 3. *Iterative successive last removal prevents manipulation without sacrifice, satisfies the clear winner condition, satisfies neutrality and is non-determined.*

Proof. Prevents manipulation without sacrifice: suppose an athlete “manipulates” by performing worse in a profile but also that she does not get a worse output ranking. Thus she is removed at the same point t and has output rank $m - t + 1$. All the partial profiles after this point will be the same as in the non-manipulated case. As she was not removed before t , this means that for all the partial profiles at stage $s < t$ she was not ranked last in discipline s modulo n , this means that she did not change the athlete who was ranked last in this discipline, thus the loser at this stage will be the same.

Clear winner: if a is better than b in all disciplines then a cannot be removed before b .

Neutrality: permuting the athletes in the profile results in permuted sets $\text{lose}(\succ)$.

Non-determined: for disciplines $i \neq 1$, consider the profile where the athlete ranked first in i is ranked last in 1. For discipline 1 consider the profile where the athlete ranked first in 1 is ranked last in 2. □

⁷ As noted by a reviewer, for Formula 1, the type of manipulation we focus on in this paper may be considered to be less “important” than the phenomenon where a racer blocks the passage of cars of rival teams in order to preserve the advantage for his teammate. This perhaps exemplifies a distinction between manipulation and strategic behaviour. A single “blocking move” is sanctioned in Formula 1 [4]. Allowing blocking may be argued to be desirable, as it adds a strategic level for the competitors and increases tension for the spectators: if one agrees with this argument one may consider blocking as strategic behaviour rather than manipulation. The type of manipulation we focus on, though perhaps rare, also occurs in Formula 1 [9]. However our manipulation is more clearly undesirable—the reviewer used the term “scandalous”.

Teamwork also plays an important role in other seemingly individualistic competitions. For example, in various cycling events, teammates draft behind each other. These strategic considerations are domain specific and would be difficult to treat in an abstract manner, as we do with our definition of manipulation in this paper. We do not see how the tools of computational social choice could be used for such specific cases.

References

- [1] Michel Balinski and Rida Laraki. *Majority Judgment: Measuring, Ranking, and Electing*. MIT press, 2011.
- [2] Salvador Barberà, Walter Bossert, and Prasanta K Pattanaik. Ranking sets of objects. In *Handbook of utility theory*, pages 893–977. Springer, 2004.
- [3] John J. Bartholdi, Craig A. Tovey, and Michael A. Trick. The computational difficulty of manipulating an election. *Social Choice and Welfare*, 6(3):227–241, 1989.
- [4] Andrew Benson. Formula 1 bosses clarify blocking rule. *BBC*, 4 January 2012. <https://www.bbc.com/sport/formula1/16416932> (accessed 12 April 2018).
- [5] Markus Brill and Vincent Conitzer. Strategic voting and strategic candidacy. In *Proceedings of the 29th conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, pages 819–826, 2015.
- [6] Donald E. Campbell and Jerry S. Kelly. Impossibility theorems in the arrovian framework. In Kenneth J. Arrow, Amartya K. Sen, and Kotaro Suzumura, editors, *Handbook of Social Choice and Welfare*, volume 1, chapter 1, pages 35–94. Elsevier, 2002.
- [7] Bhaskar Dutta, Matthew O. Jackson, and Michel Le Breton. Strategic candidacy and voting procedures. *Econometrica*, 69(4):1013–1037, 2001.
- [8] Allan Gibbard. Manipulation of voting schemes: a general result. *Econometrica*, 41(4):587–601, 1973.
- [9] Gpupdate. Barrichello admits Ferrari team orders. *gpupdate.net*, 25 November 2008. <https://www.gpupdate.net/en/f1-news/203773/barrichello-admits-ferrari-team-orders/> (accessed 28 February 2018).
- [10] Bernard Grofman and Scott L. Feld. If you like the alternative vote (aka the instant runoff), then you ought to know about the Coombs rule. *Electoral studies*, 23(4):641–659, 2004.
- [11] International Federation of Sports Climbing. Combined 2017 format for IFSC events and olympic games. *ifsc-climbing.org*, 2017. https://www.ifsc-climbing.org/images/World_competitions/Event_regulations/170314_Combined-Olympic-Format.pdf (accessed 28 February 2018).
- [12] Tony Jimenez. Cycling - I crashed on purpose, says victorious Briton. *Reuters*, 3. August 2012. <https://uk.reuters.com/article/uk-oly-cycl-ctmspr-hindes-day7/cycling-i-crashed-on-purpose-says-victorious-briton-idUKBRE87201X20120803> (accessed 28 February 2018).
- [13] Kathrin Konczak and Jérôme Lang. Voting procedures with incomplete preferences. In *Proceedings of the IJCAI-05 Multidisciplinary Workshop on Advances in Preference Handling*, 2005.
- [14] Jérôme Lang, Nicolas Maudet, and Maria Polukarov. New results on equilibria in strategic candidacy. In *Proceedings of the 6th International Symposium on Algorithmic Game Theory*, pages 13–25, 2013.
- [15] Jean-François Laslier and M. Remzi Sanver. *Handbook on approval voting*. Springer Science & Business Media, 2010.

- [16] Omer Lev and Jeffrey S. Rosenschein. Convergence of iterative voting. In *Proceedings of the 11th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems-Volume 2*, pages 611–618, 2012.
- [17] Philip J. Reny. Arrow’s theorem and the Gibbard-Satterthwaite theorem: a unified approach. *Economics Letters*, 70(1):99–105, 2001.
- [18] Tyrel Russell and Peter Van Beek. An empirical study of seeding manipulations and their prevention. In *Proceedings of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 350–356, 2011.
- [19] M. Remzi Sanver and William S. Zwicker. One-way monotonicity as a form of strategy-proofness. *International Journal of Game Theory*, 38(4):553–574, 2009.
- [20] Mark A. Satterthwaite. Strategy-proofness and Arrow’s conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, 10(2):187–217, 1975.
- [21] Jérôme Meyer (Sport Director IFSC). Interviewed by Sebastian Schneckeburger. Personal communication, 2018.
- [22] Ilia Tsetlin, Michel Regenwetter, and Bernard Grofman. The impartial culture maximizes the probability of majority cycles. *Social Choice and Welfare*, 21(3):387–398, 2003.
- [23] Mike Wright. OR analysis of sporting rules—a survey. *European Journal of Operational Research*, 232(1):1–8, 2014.
- [24] Staff writers. Olympic badminton players charged with trying to lose their games. *The Guardian*, 31 July 2012. <https://www.theguardian.com/sport/2012/aug/01/olympic-badminton-players-charged-lose> (accessed 28 February 2018).
- [25] Ning N. Yu. A quest for fundamental theorems of social choice. *Social Choice and Welfare*, 44(3):533–548, 2015.
- [26] William S. Zwicker. Introduction to the theory of voting. In F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang, and A. D. Procaccia, editors, *Handbook of Computational Social Choice*, chapter 2. Cambridge University Press, 2016.

Justin Kruger
Université Paris-Dauphine
Paris, France
Email: justin.g.kruger@gmail.com

Sebastian Schneckeburger
University of Tübingen
Tübingen, Germany
Email: sebastian.schneckeburger@uni-tuebingen.de